Lei 7,50

Editura didactică și pedagogică, București — 1971

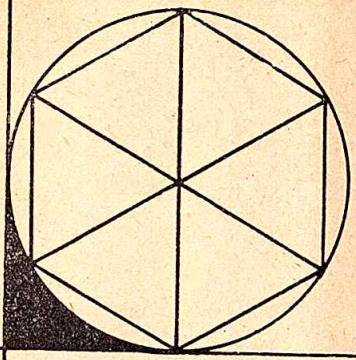
Culegere de exerciții și probleme de algebră și geometrie pentru clasele VI—VIII

Arimescu Aurelia • Arimescu Viorel

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

Culegere de exerciții și probleme de algebră și geometrie pentru clasele VI—VIII

Arimescu Aurelia
Profesor
Arimescu Viorel
Profesor



Culegere de exerciţii şi probleme de algebră şi geometrie

pentru clasele VI–VIII

Editura
didactică şi pedagogică,
Bucureşti — 1971

Referenți:

Alexandru Nicolescu, *prof. univ.*
Ana Bulancea, *prof.*
Elisabeta Iorgulescu, *prof.*
Constanța Mureșanu, *prof.*

Redactor: Eugenia Pantelimon
Tehnoredactor: Valentin Bogdan

Coli de tipar: 17

I. P. „Oltenia" Craiova
Str. Mihai Viteazul nr. 4
Republica Socialistă România
Comanda 8/6593

Exerciţii şi probleme de algebră

Capitolul I

Introducerea literelor în calcule

1. Cu ajutorul identităţii $(10+a)(10+b)=(10+a+b)10+ab$ se pot înmulţi uşor numerele de două cifre pînă la 20. Se ia ca exemplu produsul $17\cdot18$.

Rezolvare:

$17\cdot18=(10+7)(10+8)=(10+7+8)10+7\cdot8=25\cdot10+56=306.$

2. *Folosind identitatea* $a(b+c+d)=ab+ac+ad$, *să se efectueze produsul* $475\cdot126$.

Rezolvare: $475\cdot126=475(100+20+6)$;

$475\cdot126=59\,850.$

3. *Se dă:* $\dfrac{4x}{\frac{1}{2}}=\dfrac{1{,}4}{2\frac{1}{3}}$, *Se cere să se afle valoarea numerică a lui x, apoi să se verifice rezultatul.*

Rezolvare: Avem succesiv $4x=\dfrac{\frac{1}{2}\cdot1{,}4}{2\frac{1}{3}}$; $4x=\dfrac{3}{10}$; $x=\dfrac{3}{40}$.

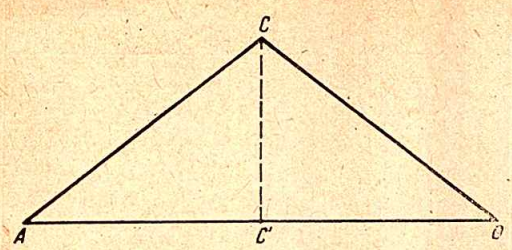


Fig. 1.

Pentru verificare se aplică proprietatea proporțiilor:

$$\frac{3}{40}\cdot 4\cdot 2\frac{1}{3}=\frac{1}{2}\cdot 1{,}4;\ \frac{7}{10}=\frac{7}{10}.$$

4. *Într-un triunghi isoscel, baza este egală cu* 16 *cm, iar una din laturile egale este de* 10 *cm. Să se afle perimetrul și aria triunghiului.*

Rezolvare: $AC=BC=10$ cm; $AB=16$ cm. Perimetrul $=AB+2BC=$ $=36$ cm. În triunghiul $BC'C$ (fig. 1) aplicăm teorema lui Pitagora: $CC'^2=BC^2-BC'^2=36$; $CC'=6$ cm. Fiind cunoscută baza $AB=16$ cm și înălțimea $CC'=6$ cm, aflăm aria triunghiului. Aria $=\frac{AB\cdot CC'}{2}=48$ cm^2.

5. *O cooperativă agricolă de producție are o grădină de zarzavat de formă dreptunghiulară. Perimetrul grădinii este egal cu* 104 m, *iar înălțimea este de* $3\frac{1}{3}$ *ori mai mică decît lungimea sa. Să se afle lungimea și lățimea grădinii.*

Rezolvare: Notăm cu x lățimea grădinii și avem: lungimea $=3\frac{1}{3}x$; perimetrul $=2x+2\cdot 3\frac{1}{3}\cdot x$; $104=2x+\frac{20}{3}x$; $x=12$; lungimea $=40$ m; lățimea $=12$ m.

Probleme propuse

6. Să se scrie:

a) Perimetrul și aria unui dreptunghi cu baza x m și înălțimea y m.

b) Perimetrul și aria unui dreptunghi cu baza $5x$ m și înălțimea 3 m.

c) Perimetrul și aria unui trapez isoscel cu baza mare a m, baza mică b m, înălțimea c m și o latură paralelă d m.

7. Se dau trei numere: x, y, z. Să se scrie:

a) Suma pătratelor lor.

b) Pătratul sumei cuburilor lor.

c) Cubul sumei pătratelor lor.

8. O livadă a unei cooperative agricole de producție are x meri, de 2 ori mai mulți pruni decît meri, z cireși și de 3 ori mai puțini peri decît cireși.

a) Să se scrie numărul pomilor fructiferi.

b) Știind că acum zece ani numărul merilor și al perilor era de 4 ori mai mic, iar al prunilor și cireșilor de 5 ori mai mic, să se scrie numărul pomilor care au existat în livadă.

9. O întreprindere livrează dintr-un număr de x piese contractate, într-o lună, jumătate din acest număr, în luna următoare jumătate din piesele rămase plus 50 de piese. Rămîn de expediat 760 de piese. Să se scrie numărul total de piese pe care trebuie să le livreze.

10. Doi muncitori efectuează o lucrare și sumele primite se raportează la orele lucrate astfel: primul muncitor a lucrat a ore și primește b lei; al doilea muncitor a lucrat c ore. Ce sumă primește al doilea muncitor?

11. Să se afle valoarea numerică a literei din egalitățile:

a) $a+120=1\,300$

b) $540+x=4\,200$

c) $a+12\frac{1}{6}=54\frac{3}{8}$

d) $a-582=345$

e) $a-5\frac{3}{4}=2\frac{5}{8}$.

f) $51{,}08-x=20\frac{1}{3}$

g) $a:124=21{,}2$

h) $13{,}25:x=5{,}3$

i) $x\cdot 2\,580=47\,023$

j) $4\frac{5}{9}x=12{,}2$.

12. Mă gîndesc la un număr, îl micșorez cu $3\frac{3}{8}$ și obțin $15\frac{1}{4}$. Care este numărul la care m-am gîndit?

13. Să se verifice egalitatea $2x+3y+z=(z-x)+3(x+y)$, atribuind literelor valori numerice.

14. Să se calculeze media aritmetică a numerelor a, b, c, d cînd:

a) $a=9$; $b=16$; $c=4$; $d=25$;

b) $a=10$; $b=12$; $c=8$; $d=15$;

c) $a=3\frac{1}{2}$; $b=5$; $c=2\frac{5}{6}$; $d=6{,}5$.

15. Să se calculeze media geometrică a numerelor a, b, cînd:

a) $a=16$; $b=25$ *c)* $a=8$; $b=18$

b) $a=64$; $b=100$ *d)* $a=0{,}0036$; $b=0{,}0625$.

16. Folosind identitatea $(a+b+c):m=a:m+b:m+c:m$, să se efectueze împărţirile: 855:5; 6 580:4; 54 864:8.

17. Folosind proprietatea $a-(b+c)=a-b-c$, să se efectueze scăderile: 985—463; 1 589—1 245; 6 824—3 212.

18. Folosind identitatea $(10+a)(10+b)=(10+a+b)\cdot 10+ab$, să se efectueze înmulţirile: $12\cdot 15$; $18\cdot 13$; $19\cdot 14$; $16\cdot 17$

19. Folosind identitatea $a(b+c)=ab+ac$, să se efectueze înmulţirile: $580\cdot 95$; $782\cdot 980$; $345\cdot 285$; $13\,426\cdot 518$.

20. Numărul a este mai mare decît numărul b cu 8. Să se scrie aceasta sub formă de egalitate în 3 feluri.

21. O parcelă pentru grîu a unei cooperative agricole de producţie poate fi arată de un tractorist în x zile şi de către un alt tractorist în y zile. Ce suprafaţă vor ara cei 2 tractorişti în 4 zile?

22. O cooperativă agricolă de producţie a semănat în prima zi 20% din suprafaţa terenului său.

1) Să se afle cîte hectare au fost semănate în prima zi, ştiind că întreaga suprafaţă a terenului de semănat este x ha.

2) Să se afle cîte hectare au fost semănate pentru: $x=320$ ha, $x=400\frac{3}{4}$ ha.

23. Într-un sac au fost x kilograme făină, iar în alt sac cu y kilograme mai puţin. Dacă $x=50$ şi $y=12$, se cere:

a) Să se afle cîte kilograme de făină sînt în sacul al doilea.

b) Să se afle cîte kilograme de făină sînt în cei doi saci.

c) De ce nu poate să fie y mai mare decît x?

24. Să se determine numerele naturale x şi y astfel ca următoarele egalităţi să fie adevărate:

a) $2x+4=20$

b) $5y-9=11$

c) $2x^2+3=53$

d) $x+y=7$

e) $4x+2y=26$

25. Una dintre laturile egale ale unui triunghi isoscel este de 3 ori mai mare decît baza sa, iar perimetrul triunghiului este de 84 cm. Să se afle laturile triunghiului.

26. Un muncitor lucrează cîte a piese pe zi, iar altul cu b piese mai mult pe zi, însă a lucrat cu c zile mai puțin decît primul. Să se afle cîte zile a lucrat fiecare muncitor, știind că au același număr de piese. Să se scrie relația cu ajutorul literelor și apoi să se calculeze cînd: $a=24$, $b=4$, $c=3$.

Capitolul II

Numere pozitive și negative

A. Numere întregi

1. *Să se găsească pe o dreaptă punctele A, B, C, D, astfel încît:* OA=+3, OB=—2, OC=+1, OD=—5.

Rezolvare: Se ia o dreaptă oarecare $x'x$ (fig. 2) și pe ea un punct fix O ca origine. Din punctul O spre dreapta sau spre stînga purtăm unitatea de măsură MN de atîtea ori cît ne arată lungimile segmentelor OA, OB, OC, OD.

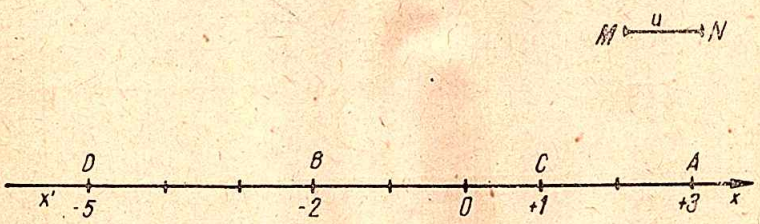


Fig 2.

2. *Să se figureze pe o axă punctele* M, N, P, Q, *cînd* MN=+2, MP=+5, MQ=+17 *și să se verifice egalitatea :* MN+NP+PQ+QM=0.

Rezolvare : Pe axa $x'x$ se consideră ca origine punctul M. Din punctul M se repetă unitatea de măsură AB de atîtea ori cît arată lungimile segmentelor MN, MP, MQ (fig. 3). Pentru verificarea egalității se află măsura segmentelor MN, NP, PQ, QM astfel : $MN=+2-0=+2$; $NP=+5-2=+3$; $PQ=+17-5=+12$; $QM=0-17=-17$. Înlocuind în egalitate, avem : $+2+3+12-17=0$.

3. *Diferența dintre debit și credit se numește sold. In luna ianuarie, debitul este* 5 040 *și creditul* 4 589. *In luna februarie, debitul este de* 5 800 *și creditul* 5 900, *iar în luna martie debitul este* 6 200 *și creditul* 6 000. *Să se afle soldul la sfîrșitul primului trimestru.*

Rezolvare : Notăm debitul cu plus, creditul cu minus și avem soldurile : ianuarie +451 ; februarie —100 ; martie +200. Soldul la sfîrșitul trimestrului va fi : +451—100+200=+551.

4. *Intr-o școală generală, în cursul unui an au venit* 8 *elevi și au plecat* 5 *elevi. La o altă școală au venit* 6 *elevi și au plecat* 10 *elevi. Cu cît s-a schimbat numărul elevilor în fiecare școală la sfîrșitul anului față de numărul celor înscriși la începutul anului ?*

Rezolvare : Dacă notăm cu plus numărul elevilor veniți și cu minus numărul elevilor plecați, vom scrie pentru :

Prima școală	*A doua școală*
+8 elevi	+ 6 elevi
—5 elevi	—10 elevi
+3 elevi (numărul elevilor a crescut cu 3)	—4 elevi (numărul elevilor s-a micșorat cu 4)

5. *Să se compare cu ajutorul semnelor de inegalitate numerele : a)* —5 și +2 ; *b)* +19 și +30 ; *c)* —40 și —3.

Rezolvare : *a)* $-5<0$, $+2>0$, rezultă $+2>-5$; *b)* +19 are valoarea absolută 19, $|+19|=19$, +30 are valoarea absolută 30, $|+30|=30$, rezultă $+30>+19$; *c)* —40 are valoarea absolută 40 ; $|-40|=40$, —3 are valoarea absolută 3 ; $|-3|=3$, $3<40$, $-3>-40$

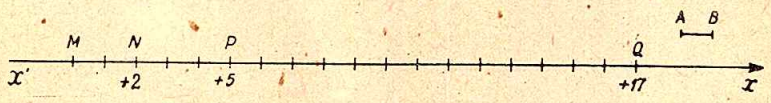


Fig. 3.

Probleme propuse

6. Într-un lac de munte temperatura apei la suprafață în luna ianuarie este de 15°C sub zero. La 2 m adîncime este de 2°C deasupra lui zero, iar la fundul lacului este de 10°C deasupra lui zero. Să se exprime această temperatură cu ajutorul numerelor pozitive și negative.

7. Colectivul unei uzine și-a majorat angajamentele la producția de țevi finite de la 1 300 t, angajament anterior, la 2 500 t. De asemenea, productivitatea muncii să fie depășită cu 5%, și nu cu 2% cum era planificat. Se cere să se exprime cu ajutorul numerelor pozitive depășirea în tone și în procente.

8. O uzină are planul de producție de 1 200 de piese lunar. Uzina în luna ianuarie a produs 1 285 de piese, în luna februarie 1 345 de piese, în luna martie 1 490 de piese și în luna aprilie 1 710 piese. Să se scrie cu ajutorul numerelor pozitive, în ordinea mărimii lor, depășirile de plan lunare și apoi să se reprezinte grafic.

9. Într-o școală generală, în cursul unui an școlar au venit x elevi și au plecat y elevi. Să se afle cu cît s-a schimbat numărul elevilor școlii cînd: *a)* $x=28$, $y=16$; *b)* $x=32$, $y=41$; *c)* $x=42$, $y=36$; *d)* $x=26$, $y=26$.

10. Să se scrie valoarea absolută a numerelor: $+2$; -8; $+15$; $+26$; -98; $+1$; -1.

11. Să se reprezinte pe axa numerelor prin puncte numerele: $+5$; -5; $+9$; -10; $+2$; -2; $+7$ și să se scrie valoarea absolută a acestor numere.

12. Se dau numerele: -3; $+5$; $+7$; -1; $+12$. Se cere să se scrie numerele opuse numerelor date și să se reprezinte pe axa numerelor prin puncte.

13. Să se compare cu ajutorul semnelor de inegalitate numerele: -3 și $+1$; -9 și $+20$; -25 și $+3$; -50 și -2; -100 și -1; -27 și -8.

14. Să se reprezinte prin puncte pe o axă mulțimea numerelor întregi x, astfel: *a)* mai mari decît -9 și mai mici decît -2, adică intervalul $(-9, -2)$; *b)* mai mici decît $+18$ și mai mari decît $+15$, adică intervalul $(15, 18)$; *c)* mai mici decît -1 și mai mari decît -15,

adică intervalul (—15, —1); *d)* mai mari decît —3 și mai mici decît +3, adică intervalul (—3, +3); *e)* să se scrie inversele numerelor de la punctele *a)*, *b)* și să se compare aceste numere cu ajutorul semnelor de inegalitate.

B. Operații cu numere întregi

Adunarea

15. *La o magazie de cereale a unei cooperative agricole de producție au fost primite* 6 t, 9 t *și* 5 t *de grîu. După sortare pe calități au fost predate bazei de recepție* 4 t, 3 t *de grîu. Se întreabă cîte tone de grîu au mai rămas în magazie.*

Rezolvare: Tonele de grîu primite le notăm cu +6, +9, +5, iar tonele de grîu predate cu —4 și —3. Adunăm aceste cantități: +6+9+ +5—4—3=+20—7=+13. Rezultatul obținut ne arată că în magazie au mai ămas 13 t de grîu.

16. *Nivelul benzinei dintr-un rezervor este de* 3 m. *S-au mai turnat două cisterne de benzină și nivelul a crescut cu* 15 cm. *Prin vînzările făcute nivelul scade cu* 10 cm. *Să se afle care este nivelul benzinei din rezervor.*

Rezolvare: 3 m=300 cm; +300+15—10=+305. Numărul +305 cm indică nivelul benzinei din rezervor.

17. *Un punct A are abscisa* —12. *Ne deplasăm de la punctul A cu* +5, *apoi cu* —2 *unități de măsură. Care este abscisa punctului de sosire?*

Rezolvare: —12+5—2=—9. Numărul —9 ne arată că la sosire sîntem cu 3 unități mai aproape de origine.

18. *La un magazin „Alimentara" stocul inițial de mărfuri s-a mărit cu* 80 kg *de zahăr*, 200 l *de ulei*, 120 kg *de făină, din care s-au vîndut* 120 kg *de zahăr*, 58 l *de ulei și* 116 kg *de făină. Se întreabă cu cît a crescut sau a scăzut stocul inițial de marfă la fiecare articol.*

Rezolvare: +80—120=—40 kg de zahăr (stocul inițial a scăzut cu 40 kg de zahăr); +200—58=+142 l de ulei (stocul inițial a crescut

cu 142 l de ulei); +120—116=+4 kg de făină (stocul inițial a crescut cu 4 kg de făină).

19. *Se dau numerele:* +5; —11; —3; +20; +1; —15. *Să se efectueze suma acestor numere, aplicînd proprietățile adunării.*

Rezolvare: (+5+20+1)+(—11—3—15)=+26—29=—3.

20. *Să se verifice egalitatea* $a+b+c=c+(a+b)$ *pentru:* $a=8$; $b=-5$; $c=2$.

Rezolvare: Se înlocuiesc literele cu valorile date: 8—5+2=2+ +(8—5).

21. *Să se adune la suma numerelor* —12; +8 *suma numerelor opuse lui* —7 și +15.

Rezolvare: Opusul numărului —7 este +7; opusul numărului +15 este —15. Suma (7—15) o adunăm cu suma (—12+8), adică: (—12+ +8)+(7—15)=—12.

Probleme propuse

22. Folosind datele din tabel, să se exprime prin numere pozitive, negative și numărul zero soldul pentru fiecare lună, apoi să se calculeze soldul pe semestrul I.

Lunile	Debit	Credit	Sold
ianuarie	3 152	2 773	
februarie	4 333	6 337	
martie	2 542	2 235	
aprilie	2 145	2 542	
mai	5 889	5 889	
iunie	7 414	7 542	
Sold pe semestrul I.			

23. Să se adune la suma numerelor —12 și +7 opusul numărului +3.

24. Să se adune la opusul numărului —20 suma numerelor —8 și —5

25. Să se adune la suma numerelor 27 și —17 suma opusă numerelor +5 și —2.

26. Să se verifice egalitatea $a+b+c=b+(-a-c)+2a+2c$ pentru:

a) $a=3$, $b=-5$, $c=-4$ c) $a=-12$, $b=8$, $c=-10$

b) $a=-6$, $b=4$, $c=-2$ d) $a=0$, $b=-3$, $c=2$.

27. Să se calculeze: $x=a+b+c+d+e$ cînd literele au valorile:

a) $a=7$, $b=9$, $c=-6$, $d=-2$, $e=1$;

b) $a=5$, $b=-3$, $c=8$, $d=-10$, $e=-4$;

c) $a=0$, $b=-10$, $c=3$, $d=-5$, $e=10$;

d) $a=45$, $b=6$, $c=-3$, $d=-14$, $e=5$.

28. Să se efectueze:

a) $5+[-3+1+(5-2)+(-5)-2]$

b) $10+\{-8+[(-3)+(+5)+12]-20\}$

c) $12+\{-3+[8+(-5)+(+7)]-10\}$

d) $5+\{-2+[6+(-5)+(+3)]-6\}$

e) $-8+(-3)+[(-1)+(+5)+2]+[(-7)+9]$

f) $3+\{-6+[10+(-6+9)]-15\}$

g) $[-18+(5-1)]+\{24+[(-14)+17]-13\}$

h) $(21-9)+\{-16+[27+(-32)]+19\}-4$

i) $5+\{-3+[8-14+(10-5)+(-11+9-1)]+2\}$

j) $-13+[(-7+9)+16]+\{-41+[19+(-1-7)]+15\}$

Scăderea

29. *Se dau numerele* —12 și —5. *Să se adune la primul număr opusul celui de-al doilea.*

Rezolvare: Opusul lui —5 este +5. Adunăm la —12 pe +5 și avem $(-12)+(+5)=-7$.

30. *Să se verifice scăderea:* $(-18)-(+4)=-22$ *aplicînd proba scăderii.*

Rezolvare: Adunăm diferența cu scăzătorul: $(-22)+(+4)=-18$.

31. *Să se calculeze:* $x=a-(b+c)-d$ pentru: $a=8$, $b=13$, $c=-12$, $d=-2$.

Rezolvare: Se înlocuiesc literele cu valorile numerice atribuite:

$x=8-[13+(-12)]-(-2)$;

$x=8-(13-12)+2=9$.

Probleme propuse

32. Într-o cameră, temperatura este $t°$. În același timp, afară temperatura este $t_1°$. Să se afle cu cîte grade este mai ridicată temperatura din cameră decît cea de afară cînd:

a) $t°=15°$, $t_1°=9°$; b) $t°=18°$, $t_1°=-5°$;

c) $t°=6°$, $t_1°=3°$; d) $t°=20°$, $t_1°=0°$.

33. Să se afle descăzutul următoarelor diferențe:

a) $x-(+5)=+3$; b) $x-(-10)=+5$;

c) $x-(-4)=+19$.

34. Ce număr trebuie să adunăm la $+12$ pentru a obține $+4$; la $+15$ pentru a obține $+9$; la -9 pentru a obține $+5$; la $+15$ pentru a obține -3.

35. Să se afle diferența $x-y$ pentru următoarele valori numerice:

a) $x=-10$, $y=+4$; b) $x=-15$, $y=+6$;

c) $x=+7$, $y=-3$; d) $x=-8$, $y=-5$.

36. Să se calculeze $x=a-b+c$ cînd:

a) $a=9$, $b=-3$, $c=-5$; c) $a=-5$, $b=5$, $c=10$;

b) $a=-6$, $b=4$, $c=-1$; d) $a=0$, $b=-1$, $c=1$.

37. Să se calculeze $x=a-b-c$ cînd:

a) $a=9$, $b=-3$, $c=-5$; c) $a=-1$, $b=3$, $c=-5$;

b) $a=-6$, $b=4$, $c=-3$; d) $a=-1$, $b=-8$, $c=16$.

38. Să se calculeze $x=a-(b+c)$ înlocuind literele a, b, c, prin valorile:

a) $a=9$, $b=-3$, $c=-5$ e) $a=18$, $b=-23$, $c=-33$

b) $a=-6$, $b=4$, $c=-1$ f) $a=-53$, $b=18$, $c=-17$

c) $a=1$, $b=3$, $c=-5$ g) $a=102$, $b=-92$, $c=47$.

d) $a=-1$, $b=-3$, $c=-5$

39. Să se efectueze operațiile:

a) $6-[(-3)+(-7)]-[(-1)-(-5)-(-8)]$

b) $12-\{10-[3-(+9)+(-2)+8]-20\}$

c) $-4-(-2)-\{(-5)-|(-7)+(-3)-(-8)|\}$

d) $-5+(-3)-\{(-1)-|(-8)-(-7)|\}$

e) $2+\{-|3-(+13)+(-5)-9|-15\}$

f) $18-|-7+(-26)+11|-|29-(15-22|$

g) $26-\{9-|-11+(7+13)-(-5+19)|+30\}$

h) $-|-23+(-42+31)|+[18-(65-24)]$

i) $-9(+11)-5-\{31+[-47-(15-25)]+4\}$

j) $-\{17-[5+(-29)-(-32)]\}-\{13+|-8-(37-40)|+2\}$

Înmulțirea

40. *Să se efectueze sumele:*

a) $(+3)+(+3)+(+3)+(+3)+(+3)(+3)$;

b) $(-8)+(-8)+(-8)$.

Rezolvare: *a)* $+3+3+3+3+3+3=+18$,

$(+3)\cdot 6=+18$;

b) $-8-8-8=-24$, $(-8)\cdot 3=-24$.

41. *Să se calculeze* $x=2a-3b+4c$ *pentru:* $a=+5$, $b=+8$, $c=-1$.

Rezolvare: Se înlocuiesc literele cu valorile date:

$x=2(+5)-3(+8)+4(-1)$ și rezultă $x=10-24-4=-18$.

42. *Să se verifice egalitatea* $ad+bd-cd=d(a+b-c)$ *pentru* $a=-3$, $b=+7$, $c=+11$, $d=-2$.

Rezolvare: Se înlocuiesc literele cu valorile date:

$(-3)(-2)+(+7)(-2)-(+11)(-2)=-2(-3+7-11)$;

$6-14+22=-2(7-14)$.

Probleme propuse

43. Să se calculeze $x=ab$, dînd lui a și b următoarele valori numerice:

a)	$a=10$,	$b=-8$	e)	$a=5$,	$b=40$
b)	$a=-11$,	$b=-5$	f)	$a=-16$,	$b=-3$
c)	$a=-6$,	$b=2$	g)	$a=-8$,	$b=1$
d)	$a=+8$,	$b=-5$	h)	$a=0$,	$b=-15$.

44. Aplicînd comutativitatea și asociativitatea, să se efectueze:

a) $(-4)(+35)(-25)$ d) $(+45)(-8)(-2)(-25)$

b) $(-2)(-45)(-5)$ e) $(-8)(+150)(+125)(-2)$

c) $(-4)(-8)(+3)(-5)$ f) $(-14)(+25)(+20)(-5)$.

45. Să se calculeze $x=2a-3b+4c$ cînd a, b, c sînt egale cu:

a) $a=+5$, $b=-3$, $c=-1$

b) $a=-10$ $b=-4$, $c=+2$

c) $a=+36$, $b=-4$, $c=+13$

d) $a=+2$, $b=+1$, $c=-4$

e) $a=7$, $b=5$, $c=3$

f) $a=-8$, $b=-6$, $c=0$.

46. Aplicînd proprietatea distributivității pentru înmulțire, să se verifice egalitatea $ac+bc=c(a+b)$, dînd lui a, b, c, următoarele valori numerice: a) $a=3$, $b=-5$, $c=-8$; b) $a=10$, $b=-15$, $c=7$; c) $a=-8$, $b=4$, $c=-2$.

47. Aceeași problemă pentru egalitatea $ae+be-ce=e(a+b-c)$, cînd literelor a, b, c, e li se dau valorile:

a) $a=-5$, $b=+2$, $c=+1$, $e=-3$

b) $a=+12$, $b=-24$, $c=0$, $e=-10$

c) $a=-8$, $b=-1$, $c=3$, $e=-9$

d) $a=-30$, $b=+14$, $c=-11$, $e=+7$.

48. Să se efectueze:

a) $-3[(-5)2-(-6)(+1)+(+8)(-2)]$;

b) $[(-3)(-4)-(+5)][(-8)-(+2)(-8)]$

c) $\{-4-[(-1)(+2)-(-8)+(-10)][-3(+5)+(-3)(-1)]\}(-6)$

d) $-20(5)[-(+3)(+2)]-[48(5)-(-85)4]$

e) $3[-15(+4)-(11)(-5)]-6[(-13)2+(30-4)]-2(-7)$

f) $-\{-20[-7(+15)-(+24)(-4)]\}+\{[-(+8)(-30)]-28\}$.

Ridicarea la putere

49. Să se efectueze:

a) $+5+(+2)^3-3-(-2)^4$;

b) $-(+3)^2+(-5)^2-(-1)^5+10$;

c) $8-(+3)^3+(-4)^2$.

50. Să se calculeze $y=x^3+x^2+20$, cînd x are valorile: $+1$; $+4$; -2; -3; -4; -5.

51. Să se efectueze:

a) $2(+4)^3-(+2)^5-3(-6)^2$

b) $3(-5)^2-2(-4)^3-4(+2)^4-(-7)^2$

c) $[3(-2)^3+2(-4)^2+3(-5)](-3)^2$

d) $\{3(+5)^2-3[4+(-3)^2-(-1)^5]\ [4(+2)^3-8(-2)^2]\}\ (-2)^3$

e) $7(-1)^3[-(+2)^2+(-3)^3]^2-[(-4)^3+(-7)^2]$

f) $-\{2[2^5+(-3)^3]^2\}+\{-4[(-6)^2(-1)^3]^2+[5(+20)(-7)^2]\}^2$.

52. Să se calculeze în două moduri: $5\cdot5^3-(2^3\cdot2^2)+3^3\cdot3$.

Împărțirea

Să se afle valoarea lui x din egalitățile:

53. $8x=40$; $3x=-18$; $x\cdot3=-12$; $60x=-180$; $-3x=5$; $-4x=-7$.

54. $-12:x=3$; $-24:(-x)=-4$; $60:(-x)=-20$; $6:x=15$; $30:x=2$; $-5:x=3$.

55. $30:3x=2$; $40:4x=-5$; $15x:3=10$.

56. Să se efectueze:

a) $(-8):(-3)+(+5)$ *c)* $(-12):(-3)+(-15):(+5)$

b) $(-16):[(-3)+(+5)]$ *d)* $(-16):(+4)-(+18):(-2)$.

57. Să se calculeze $x=a+(a-b)-(a+b):c$ pentru valorile numerice date literelor a, b, c: a) $a=-5$, $b=-4$, $c=-8$; b) $a=6$, $b=-2$, $c=-1$; c) $a=-1$, $b=1$, $c=10$; d) $a=2$, $b=-1$, $c=1$; e) $a=-3$, $b=-5$, $c=2$.

58. Să se verifice egalitățile și să se arate proprietatea aplicată:

a) $(abc):x=(a:x)\cdot bc=a(b:x)c=ab(c:x)$ pentru $a=-20$, $b=8$, $c=-12$, $x=-2$

b) $a:(bc)=a:b:c$ pentru $a=24$, $b=-3$, $c=-8$

c) $(a+b):c=(a:c)+(b:c)$ pentru $a=-24$, $b=20$, $c=4$

d) $a:b=a\cdot x:b\cdot x$ pentru $a=-8$, $b=+4$, $x=+2$.

C. Operații cu fracții care au numărătorul și numitorul numere pozitive sau negative

59. Se dau numerele $2\frac{3}{5}$, $7\frac{1}{2}$ și se cere:

a) Să se reprezinte pe axă prin puncte.

b) Să se scrie zece numere cuprinse în intervalul $\left(2\frac{3}{5}, 7\frac{1}{2}\right)$.

60. Să se reprezinte pe axa numerelor 5 numere mai mari decît: $4\frac{3}{4}$, $\frac{1}{3}$, $-2\frac{1}{5}$, $\frac{3}{4}$.

61. Să se reprezinte pe axă 3 numere mai mici decît: $-\frac{3}{4}$, $+\frac{8}{9}$, $\frac{4}{5}$.

62. Să se reprezinte pe axă numerele reale opuse numerelor: $-\frac{3}{4}$, $+\frac{1}{2}$, $-\frac{5}{6}$.

63. Se dau numerele $\frac{4}{-3}$, $-\frac{4}{5}$, $+\frac{1}{2}$, $-\frac{5}{7}$. Să se reprezinte pe axa numerelor prin puncte inversele numerelor date.

64. Să se reprezinte pe axa numerelor reale: 0,5; —2,3; 1,8; —0,8.

65. Să se compare cu ajutorul semnelor de inegalitate numerele: $-\frac{5}{8}$ și $-\frac{5}{9}$; $+\frac{11}{5}$ și $+\frac{9}{15}$; —0,1341 și 0,1346, 1,52 și 1,8; $-\frac{2}{3}$ și $-\frac{3}{4}$; —1,54 și $+2\frac{3}{7}$.

66. Să se scrie în ordine crescătoare și descrescătoare fracțiile: $-3\frac{1}{2}$, $+10\frac{1}{5}$, $-\frac{1}{2}$, $\frac{-5}{-6}$, $-2\frac{3}{4}$, $1\frac{2}{3}$, $\frac{1}{-8}$, $\frac{1}{3}$.

67. Să se scrie cu numitori pozitivi fracțiile:

$$\frac{2}{-5}, \frac{3}{-8}, \frac{-1}{-3}, \frac{-7}{-9}, \frac{-4}{-5}.$$

68. Să se aducă la forma ireductibilă fracțiile:

$$\frac{-9}{12},\ \frac{-40}{-160},\ \frac{12}{-18},\ -\frac{5}{20},\ \frac{16}{-24},\ \frac{-15}{45},\ \frac{-11}{-36}.$$

69. Să se efectueze:

a) $\frac{1}{4}+\frac{3}{-4}+\frac{-5}{-4}$ c) $-3\frac{2}{5}+1\frac{5}{6}+\frac{2}{3}-5\frac{1}{2}+10$

b) $\frac{1}{2}+\frac{5}{-6}+\frac{-7}{12}+\frac{-11}{-36}$ d) $-0,1+8\frac{1}{3}+11\frac{2}{3}+4,4.$

70. Să se calculeze sumele următoare folosind proprietățile adunării:

a) $-2\frac{1}{2}+1\frac{1}{6}+\frac{5}{6}-0,5;$

b) $-5\frac{3}{4}+0,25-\frac{1}{4}-3\frac{1}{8}-\frac{1}{4}+3,125;$

c) $\frac{4}{5}+\frac{1}{2}+\frac{1}{5}-\frac{3}{4}.$

71. Să se verifice egalitatea $m+n+p=n+(m+p)$ pentru:

a) $m=\frac{1}{2}$, $n=\frac{2}{3}$, $p=-\frac{1}{2}$; c) $m=4\frac{1}{2}$, $n=-3\frac{1}{4}$, $p=1$;

b) $m=\frac{3}{4}$, $n=-\frac{2}{3}$; $p=-\frac{1}{5}$; d) $m=-2\frac{1}{3}$, $n=2\frac{2}{3}$, $p=-\frac{1}{3}$.

72. Să se efectueze operațiile:

a) $\left(+5\frac{3}{4}\right)+\left\{-1\frac{2}{5}+\left[0,6+(-5)+\left(+3\frac{1}{2}\right)\right]-6\frac{1}{5}\right\}$

b) $-8+\left(-\frac{3}{4}\right)+\left[\left(-1\frac{5}{6}\right)+(2,5)+5\right]+\left[\left(-3\frac{1}{2}\right)+9\right]$

c) $2\frac{3}{4}-\left(-1\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{5}{6}\right)-\left(-\frac{3}{8}\right)-\left(+4\frac{2}{3}\right)$

d) $2\frac{1}{8}+\left\{-4-\left[3\frac{1}{2}-\left(+\frac{3}{4}\right)+\left(\frac{-5}{8}\right)-\frac{2}{3}\right]-5\frac{1}{3}\right\}$

e) $-9\frac{1}{4}-\left\{\frac{5}{8}-\left[\left(1\frac{2}{3}-2\frac{1}{2}\right)-\left(-4\frac{1}{6}\right)\right]-7\frac{3}{4}\right\}$

f) $-1\frac{4}{15}-\left\{2,5-\left[\frac{5}{9}-\left(+\frac{2}{3}\right)+0,5\right]-3\frac{4}{15}\right\}.$

73. Să se efectueze: a) $\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{6}$; b) $-\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{7}$; c) $-\frac{3}{4}\cdot\frac{-5}{7}$;

d) $\frac{1}{-4}\cdot\frac{-3}{8}$; e) $\frac{-7}{9}\cdot\frac{-3}{-14}$.

74. Să se efectueze în două moduri produsele:

$a)\ \frac{2}{3}\cdot\frac{-5}{7}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{-7}{-6}$; $b)\ \frac{3}{8}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{-8}{-9}\cdot\frac{-5}{6}$; $c)\ \frac{-5}{6}\cdot(-2{,}4)\cdot\frac{3}{5}$.

75. Să se verifice egalitatea $xz+yz=z(x+y)$ cînd x, y, z au valorile:

a) $x=\frac{1}{3}$, $y=\frac{-3}{4}$, $z=\frac{6}{7}$; b) $x=\frac{-3}{5}$, $y=\frac{1}{3}$, $z=-\frac{5}{8}$;

c) $x=\frac{-2}{3}$, $y=\frac{13}{4}$, $z=-0{,}2$.

76. Să se calculeze $x=2a-3b+4c$ pentru:

a) $a=\frac{7}{8}$, $b=\frac{-5}{6}$, $c=5$

b) $a=-\frac{3}{4}$, $b=-1$, $c=0$

c) $a=2\frac{1}{2}$, $b=0{,}1$, $c=-\frac{1}{4}$

d) $a=1\frac{5}{6}$, $b=2{,}8$, $c=-3\frac{1}{2}$.

77. Să se efectueze împărțirile:

$a)\ -\frac{3}{4}:\frac{2}{5}$

$b)\ \frac{7}{-9}:\frac{-14}{27}$

$c)\ \frac{-3}{4}:\frac{5}{-8}$

$d)\ 0:-\frac{1}{2}$

$e)\ \frac{3}{7}:0$

$f)\ 5:\frac{-1}{2}$

$g)\ 2\frac{3}{4}:\left(-1\frac{4}{5}\right)$

$h)\ 1\frac{5}{6}:(-3)$

$i)\ 2\frac{3}{4}:(-1{,}2)$.

78. Să se calculeze $x=\frac{a}{b}$ pentru următoarele valori date lui a și b:

a) $a=\frac{3}{4}$, $b=\frac{-2}{5}$

b) $a=\frac{5}{-7}$, $b=\frac{-1}{-14}$

c) $a=2\frac{3}{4}$, $b=-1\frac{5}{6}$

d) $a=-1$, $b=\frac{1}{5}$.

79. Să se efectueze $x=a+(a-b)-(a+b):c$ pentru următoarele valori numerice ale literelor a, b, c:

a) $a=-5\frac{-}{4}$, $b=-1\frac{1}{4}$, $c=-\frac{1}{2}$, b) $a=-8$, $b=+3$, $c=-5\frac{1}{3}$;

c) $a=-7$, $b=2\frac{1}{3}$, $c=1{,}4$.

80. Să se efectueze:

a) $\left[-1\frac{1}{2}+\left(-2\frac{1}{2}\right)\right]:(-2)$

b) $\dfrac{-4+(-5)-6}{-3}$

c) $\dfrac{-5\frac{3}{4}-1\frac{1}{4}}{-\frac{1}{2}}$

d) $\dfrac{2\frac{1}{3}-\left(+\frac{3}{4}\right)\left(+\frac{2}{3}\right)}{-5-\left(+3\frac{1}{2}\right)\cdot 0{,}5}$

81. Să se efectueze:

a) $\dfrac{16-(+9)^2+(-3)^3}{4\left(-\frac{1}{2}\right)^3+(+3)^2}$

b) $\dfrac{[(+2)^2-1]\,[3(-4)^2+5]}{(-5)^2-[6-(-1)^5+3(-3)^2]}$

c) $\left(-5-3\frac{1}{2}\right)^2+(-2-1)^2\left(+\frac{1}{2}-1+5\right)+(-1+2)^3$

d) $\dfrac{(-1)(-2)}{3}+\dfrac{(-2)^3}{-1}+\dfrac{(-1)^3}{-2}+\dfrac{1}{-1}+\dfrac{1}{-2}+\dfrac{1}{3}$

e) $\dfrac{(-3)\cdot(-1)^2(-2)^3-(-5)^3(-2)^3+(+4)^2}{[(+7)\cdot(-2)-(+1)](-5)^2}$

f) $\dfrac{\frac{2}{5}-\left(\frac{1}{2}\right)^2+(0{,}5)\,(-4)^2}{-\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(-\frac{1}{5}\right)^3+(0{,}3)^2}$.

g) $\dfrac{(-5)^2+\left(-\frac{1}{3}\right)^3\cdot(+9)^2+(-2)^3+\left(-\frac{1}{2}\right)^2}{\left(1\frac{1}{2}\right)^2+(0{,}2)^2:\left(\frac{1}{4}\right)^2}$

Calcul algebric

A. Valoarea numerică a expresiilor algebrice

1. *Să se afle valoarea numerică a expresiei algebrice :*

$E(x, y)=\frac{(x^3+y^2)-(x-y)^2}{4x^4y^2}$ pentru : $x=-1$, $y=-\frac{1}{2}$.

Rezolvare : *Metoda I* Se înlocuiesc literele x, y cu valorile numerice date şi avem succesiv :

$$E\left(-1;-\frac{1}{2}\right)=\frac{\left[(-1)^3+\left(-\frac{1}{2}\right)^2\right]-\left[(-1)-\left(-\frac{1}{2}\right)\right]^2}{4(-1)^4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=$$

$$=\frac{\left(-1+\frac{1}{4}\right)-\left(-1+\frac{1}{2}\right)^2}{4\left(+\frac{1}{4}\right)}=\frac{-\frac{3}{4}-\frac{1}{4}}{1}=-1.$$

Am obţinut $E\left(-1\,;\,-\frac{1}{2}\right)=-1$.

Metoda a II-a. Se aduce fracţia la forma cea mai simplă :

$$E\ (x,y)=\frac{x^3+y^2-x^2+2xy-y^2}{4x^4y^2}=\frac{x^3-x^2+2xy}{4x^4y^2}\ ;$$

$$E\ (x,y)=\frac{x(x^2-x+2y)}{4x^4y^2}=\frac{x^2-x+2y}{4x^3y^2}\ .$$

---

* Operaţiile se efectuează în mulţimea numerelor reale, excluzînd acele valori care conduc la operaţii fără sens.

Se înlocuiesc literele cu valorile numerice date și avem:

$$E\left(-1,-\frac{1}{2}\right)=\frac{(-1)^2-(1)+(2)\left(-\frac{1}{2}\right)}{4(-1)^3\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=-1.$$ Am obținut același rezultat.

Probleme propuse

Să se afle valoarea numerică a expresiilor algebrice:

2. $2a^3-3a^2+3a-1$ pentru: $a=-2$, $a=-\frac{1}{2}$.

3. $x(2x-y)^3-3x(x-2y)^2$ pentru: $x=+2$, $y=-\frac{2}{3}$.

4. $2x^4-x^3y+2x^2y^2$ pentru: $x=\frac{2}{3}$, $y=\frac{3}{4}$.

5. Să se arate că valoarea numerică a expresiei algebrice $\frac{(x+y)^2-(x-y)^2}{4xy}$ este egală cu 1 pentru orice valori numerice date lui x și y.

Să se afle valoarea numerică a expresiilor algebrice:

6. $x^3\left(8xyz^3+\frac{x}{5y}\right)$ pentru: $x=10$, $y=0{,}1$, $z=0{,}5$.

7. $\frac{xy}{z}\left(yz+y^2+\frac{x}{z}\right)$ pentru: $x=+2{,}5$, $y=0{,}4$, $z=0{,}2$.

8. Să se aducă la forma cea mai simplă și să se afle valoarea numerică a expresiei algebrice:

$$\frac{x+\frac{1}{x}+1}{x^2+\frac{1}{2}},\ \text{pentru: } x=-\frac{1}{2},\ x=-3.$$

Să se afle valoarea numerică a expresiilor algebrice:

9. $\frac{1-2xy}{3x^2y}-\frac{2+3xy^2}{4xy^3}$ pentru: $x=+\frac{1}{2}$, $y=-\frac{2}{3}$.

10. a^x+b^x pentru: $a=-2$, $b=+3$, $x=+4$.

11. Să se aducă la forma cea mai simplă și să se afle valoarea numerică a expresiei algebrice:

$$a-\frac{a-1}{\frac{a+1}{\frac{a(a-1)}{a+1}}}+1 \text{ pentru: } a=-2,\ a=-\frac{2}{3}.$$

12. Să se afle valoarea numerică a expresiei algebrice:

$$\frac{abc-abd+bcd-cda}{(a^2+b^2)\cdot cd-(c^2+d^2)\cdot ab},$$

pentru: $a=+4$, $b=+3$, $c=+2$, $d=+1$.

Să se afle valoarea numerică a expresiilor:

13. $\left(\frac{x-y}{x+y}+\frac{x+y}{x-y}\right)\left(\frac{x^2+y^2}{2xy}+1\right)\frac{xy}{x^2+y^2}$ pentru:

a) $x=+2$, $y=+1$; b) $x=-1$, $y=+2$.

14. $\frac{a(a^2-bc)+b(b^2-ac)+c(c^2-ab)}{a(a-b)+b(b-c)+c(c-a)}$, pentru: $a=5$, $b=-3$, $c=-1$.

15. Se dau expresiile: $\frac{5}{x-1}$; $\frac{2}{x+5}$; $\frac{1}{2x+6}$. Să se afle pentru ce valori ale lui x valoarea numerică a expresiilor algebrice date este 1) pozitivă, 2) negativă, 3) fără sens.

16. Pentru ce valori ale lui x valoarea numerică a expresiei $\frac{x-1}{2}$ este: pozitivă, negativă, egală cu zero.

B. Monoame. Operații cu monoame

17. Să se stabilească gradul monoamelor: $3x^2y^3z$, $-x^4y^5z$, $2xy^2z$, $-4a^3b^4c^2d$, $3xyz$ în raport cu fiecare literă; în raport cu prima literă și ultima literă; în raport cu toate literele.

Monoamele următoare să se scrie pe coloane de monoame asemenea:

18. $5ab$, $-4a^2b^2$, $-2ab$, $-8ab^2$, $+3ab$, $-ab^2$, $+4a^2b^2$, $+3a^2b$, $+a^2b^2$, $-ab$, $+10ab^2$, $-8a^2b$, $+7a$.

19. $\frac{1}{2}ab$, $-\frac{3}{4}ab^2$, $-1\frac{1}{2}ab^2$, $+2\frac{1}{4}a^2b$, $-0{,}4a^2b^2$, $-5a^3b^2$, $-a^3b^3$, $+6ab^2$, $-0{,}2a^2b^2$, $-\frac{2}{3}a^3b^3$, $+0{,}1a^3b^2$.

20. x^2, $-2x^2y$, $-5xyz$, $+4x^2$, $-x^2yz$, $\frac{3}{4}x^2y$, $-x^2yz$, $+xyz$, $-\frac{1}{3}x^2$, $+5x^2yz$, $-2x^2y$, $+4xy^2$, $-xyz$, $+3x^2yz$.

21. Monoamele $6x$, $-8x^2y$, $-2xy^2$, $+5xy$, $-6x$, $+8x^2y$, $-5xy$, $+2xy^2$ să se grupeze ca monoame opuse.

Să se efectueze reducerea termenilor asemenea:

22. a) $3x^2-6x^2+9x^2$

b) $-8xy+10xy-3xy+xy$

c) $8a^2b+3a^2b-5a^2b+a^2b-2a^2b$.

23. a) $-\frac{3}{4}ab+\frac{2}{3}a^2b+ab-\frac{5}{6}a^2b-\frac{1}{2}ab$

b) $-\frac{1}{2}xy^2-\frac{3}{8}x^2y+\frac{3}{4}x^2y-\frac{7}{8}xy^2+\frac{1}{2}xy^2$

c) $-0{,}3xy-0{,}2x^2+1{,}4y-5x^2-2{,}3xy-y$.

24. a) $4x^2+12a^2b+9xy^2+8x^2+a^2b-2xy^2$

b) $-10x^2y+4x-13a^2b+4x^2y-3y-4a^2b$

c) $7x^2-12ab-\frac{3}{4}x^2-7x^2+\frac{1}{2}x^2+12ab$

d) $-2\frac{1}{5}a^2b+0{,}5m-15{,}3t^4-1\frac{1}{2}a^2b+\frac{2}{1}m-4{,}7t^4$.

25. Lățimea unui dreptunghi este x centimetri, iar lungimea de 3 ori mai mare decît lățimea. Să se exprime perimetrul dreptunghiului.

Să se calculeze:

26.

a) $\frac{1}{5}x^2(-20y)$

b) $-\frac{3}{4}xy^2\left(-\frac{5}{6}x^3y^5\right)$

c) $2\frac{1}{3}a^2bc\left(-1\frac{3}{4}abc\right)$

d) $1\frac{3}{7}x^2yz^3(-0{,}7xz^2)$.

27.

a) $-3a\left(-\frac{1}{6}b\right)5c$

b) $-\frac{3}{8}a^2(-12b)\ (-0{,}5a)$

c) $\frac{1}{2}a^2bc\left(-\frac{3}{4}a^3b^2c^4\right)(-8a)\ (-2)$

d) $\frac{3}{4}ab\left(-\frac{8}{9}a^2b\right)0$.

28. Curtea unei școli în formă de dreptunghi are perimetrul 183,40 m și lățimea $\frac{2}{5}$ din lungime. Să se afle lunghimea și lățimea.

Să se calculeze:

29.

a) $2x^3y:(-5x)$

b) $-5x^7:(+3x^5)$

c) $-24x^2y^2z:(+6xyz)$

d) $\left(-\frac{2}{5}a^4y^3\right):\left(-\frac{1}{2}a^3y^2\right)$

e) $-\frac{3}{4}x^5y^3z:\left(+1\frac{1}{2}x^2y^2z\right)$

f) $2x^8y^5z^3:(-3x^3y^2z)$

g) $2x^6y^3z:\left(-\frac{3}{4}x^2y^3z\right)$

h) $(+0,5x^3y^2z):\left(-\frac{2}{3}xy\right)$

i) $\left(+1\frac{5}{6}x^2y^3\right):(-22xy)$

j) $-15(x+y)^3:6(x+y)^2$

k) $12(x-y)^5:\frac{1}{2}(x-y)^3$

l) $-20(x-y)^7:\frac{2}{5}(x-y)^5$.

30.

a) $20a^2b:(+4a)+15a^3b^2:(-5a^2b)$

b) $(-35a^3b^5c^2):(+7ab^2c)-(-21a^4b^3c^3):(+3a^2c^2)$

c) $\frac{1}{2}x^5y^3z:\left(+\frac{3}{4}x^3yz\right)-\frac{1}{5}xy(+2xy)+(+5x^3y^5z^2):\left(-\frac{1}{2}xy^3z^2\right)$

d) $2(x+1)^5:4(x+1)^2-\frac{3}{7}x^2y^5:\frac{3}{7}xy^3+12(y-5)^{3m-2}:3(y-5)^{m-5}$

Să se ridice la putere:

31.

a) $(+2a)^2$, $(+3xy)^3$, $(+axy)^5$, $\left(+\frac{2}{3}xy\right)^3$, $\left(+1\frac{1}{3}bc\right)^4$, $(0,2x^2y)^3$, $(+1,5x^2)^2$

b) $-(-2x)^2$, $(+2x^3y^2)^3$, $(-5x^3y^4)^3$, $(-ab^7)^4$

c) $(-4ab^2)^2$, $(+x^5y^3)^3$, $(-a^4b^3c)^4$, $(-3x^3y)^3$, $(+x^4y^2)^2$, $(-x^3y^2)^5$

d) $\left(+\frac{1}{3}x^4y^2\right)^3$, $\left(+1\frac{1}{2}a^2b\right)^3$, $\left(-\frac{1}{4}a^3b^2\right)^2$, $\left(-2\frac{1}{3}x^2y\right)^3$, $(+0,4x^3y^3)^2$, $(-1,2x^4y^2)^3$.

Să se calculeze:

32.

a) $2x^2y \cdot (-x^2y)^2$; b) $-5x^3y : (0{,}5x)^2$;

c) $3(x^3y)^{2m} \cdot (-xy^2)^{5(m-1)}$;

d) $21(x+y)^{3m+4} : 7(x+y)^{m+3}$;

e) $(+2ab)^2 - (-3a)^3 + (+a^4b^4) : (a^2b^2) + (-5a^2)^2 : (+a)$

f) $3(2a+b)^{3n} - 2(a+3b)^{4p} + 10(2a+b)^{5n} : 2(2a+b)^{2n} -$
$-14(a+3b)^{11p} : 2(a+3b)^{7p}$.

C. Polinoame. Operații cu polinoame

33. Să se scrie polinoamele $P(x)$, $P(y)$, având respectiv gradele, doi, trei, patru.

34. Să se stabilească în raport cu fiecare variabilă gradele polinoamelor:

a) $P(x,y) = 5x^2 - 8xy^3 + 5$

b) $P_1(x,y,z) = 6xy - 9x^2 + z^3$

c) $P_2(x,y) = 2x^4y - 5x^4y^3 + xy^2 - 3y^3$

d) $P_3(a,b,c) = 3a^3bc - ab^2c^2 + 4a^5 - 5a^4b$

e) $P_4(x,y) = 2x^4y - 5x^4y^3z + 6x^6y - 10xy$.

35. Să se ordoneze după puterile variabilei x în ordine crescătoare și descrescătoare polinoamele:

a) $E(x) = 8x^5 + 3x - 2x^3 + 4x^2 - x^4 + 2$

b) $F(x,y) = 15x^2y^4 - 13x^4y^2 + 28x^5y - 26x^3y^3 + 8 - 5x$

c) $P(x,y) = x^4 - 5x^3y - 17xy^3 + 9 + 12y^4 + 13x^2y^2 - 2x^5y^3$

d) $Q(x,y) = -3 + 6x^8y + 2x^2y^4 - 5x^4y^4 + 9xy - x^6y^2 + 2x^3$.

36. *Se dau polinoamele:* $P_1(x,y) = 3x^2 + 5xy + y^2 - 4x + 5y - 3$; $P_2(x,y) = 4x + 2x^2 - 2y^2 - 5y + 3$; $P_3(x,y) = -y + x - 2x^2 - 4xy$.

Să se efectueze suma lor.

Rezolvare: *Metoda I.* În suma $P_1(x,y) + P_2(x,y) + P_3(x,y)$, $P_1(x,y)$, $P_2(x,y)$ și $P_3(x,y)$ se înlocuiesc, scriindu-se unul după altul, prin termenii săi și avem:

$P_1(x,y) + P_2(x,y) + P_3(x,y) = 3x^2 + 5xy + y^2 - 4x + 5y - 3 + 4x + 2x^2 -$
$-2y^2 - 5y + 3 - y + x - 2x^2 - 4xy = 3x^2 + xy - y^2 + x - y$.

Metoda a II-a. Se ordonează polinoamele după puterile descrescătoare ale aceleiași variabile (de exemplu variabila x) și se scriu unul sub altul, pe coloane de termeni asemenea, apoi se adună parte cu parte.

$$P_1(x,y) = 3x^2+5xy-4x+y^2+5y-3$$
$$P_2(x,y) = 2x^2+4x-2y^2-5y+3$$
$$P_3(x,y) = -2x^2-4xy+x-y$$
$$P_1(x,y)+P_2(x,y)+P_3(x,y) = 3x^2+xy+x-y^2-y.$$

37. *Să se efectueze:*

$(3x^2-5y+xy-3)+(4x^2-9xy+5)-(14x^2-3y+4xy+2)-(-11x^2+23y-7xy+11)$.

Rezolvare: Se scriu polinoamele unul sub altul, iar cele care au semnul minus în fața parantezei cu semn schimbat, pe coloane de termeni asemenea, apoi se adună și avem:

$$\begin{array}{r} 3x^2-5y+xy-3 \\ 4x^2-9xy+5 \\ -14x^2+3y-4xy-2 \\ +11x^2-23y+7xy-11 \\ \hline = 4x^2-25y-5xy-11 \end{array}$$

38. *Să se efectueze:* $2x^2-3x-\{-x+(x^2-2x)-[3x^2-(2x-x^2)-(2x^2-3x)]\}$.

Rezolvare: Avem succesiv:

$$2x^2-3x-[-x+x^2-2x-(3x^2-2x+x^2-2x+3x)] = 2x^2-3x-(-x+x^2-2x-3x^2+2x-x^2+2x^2-3x) = 2x^2-3x+x-x^2+2x+3x^2-2x+x^2-2x^2+3x = 3x^2+x.$$

39. *Un trapez isoscel are baza mică egală cu x, latura neparalelă egală cu $x-3$ și perimetrul egal cu $4x+4$. Să se afle baza mare a trapezului.*

Rezolvare: Baza mare a trapezului se află scăzînd din perimetrul său laturile cunoscute: $4x+4-[x+2(x-3)] = 4x+4-(x+2x-6) = 4x+4-x-2x+6 = x+10$.

Probleme propuse

Să se efectueze:

40. a) $(x^2+4x-5)+(+2-3x+x^2)$;

b) $(2y^2-4y-1)+(-1+4y-2y^2)$

c) $(5x^2-ax+a^2)+(3x^2+2ax-3a^2)+(-4ax+2a^2-x^2)-3ax$

d) $(4a^4+3a^3b-2a^2b^2-4ab^3)+(3a^4-8a^3b+9a^2b^2+ab^3)+(-6a^4+$
$+a^3b+5a^2b^2+9ab)$

e) $\left(-\frac{5}{6}x^2+1\frac{2}{3}xy+\frac{3}{4}y^2\right)+\left(\frac{5}{12}x^2-\frac{4}{3}xy-7y^2\right)+$

$+\left(2\frac{1}{2}x^2+1\frac{5}{4}xy-y^2\right)$

f) $\left(5\frac{1}{4}a^3+3\frac{1}{2}ab^2+2\frac{1}{6}a^2b-8\frac{2}{3}b^3\right)+\left(b^3-1\frac{1}{4}ab^2+13a^2b-3\frac{5}{6}a^3\right)$

g) $(0{,}8x^2y^2-1{,}2x^3y+0{,}8x^4+5{,}7xy^3-0{,}9y^4)+(-4{,}2xy^3-0{,}1y^4+$
$+2{,}3x^3y+0{,}2x^4-0{,}12x^2y^2)$

h) $(-2{,}34a+1{,}03a^3-0{,}35+1{,}01a^2)+(+0{,}15a^3-2{,}5a+1{,}23-$
$-3{,}5a^2)+(1{,}2a^2-0{,}01a^2+1{,}24a+0{,}35)$.

41. a) $8x^2-(7x^2-3y)-5y$

b) $(5x^2y+6xy^2)-(5x^2y-3xy^2)-(-x^2y+2xy^2)$

c) $-(x^2+8x-5)-(-5x^2-10x+2)$

d) $\left(+\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}y-\frac{1}{5}z\right)-\left(-\frac{2}{3}x-\frac{1}{2}y+\frac{1}{4}z\right)$

e) $\left(\frac{1}{7}x^2+\frac{1}{5}y^2-\frac{2}{3}x\right)-\left(+\frac{3}{14}x^2-\frac{4}{5}y^2-\frac{1}{15}x\right)$

f) $\left(\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{4}xy^2-3x^2y-2y^3-1\right)-\left(3x^3-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}y^3-\frac{1}{3}x^2y-2xy^2\right)$

42. Se dau polinoamele:

$A(x,y)=x^2-3xy-y^2+2x-3y+1$;

$B(x,y)=-2x^2+xy+2y^2-5x+2y-3$;

$C(x,y)=3x^2-4xy+7y^2-6x+4y+5$;

$D(x,y)=-x^3+5xy-3y^2+4x-7y-8$

și se cere să se determine polinoamele:

a) $P(x,y)=A(x,y)+B(x,y)-C(x,y)-D(x,y)$

b) $Q(x,y)=A(x,y)-B(x,y)+C(x,y)-D(x,y)$

c) $R(x,y)=-A(x,y)+B(x,y)+C(x,y)+D(x,y)$

d) $S(x,y)=-A(x,y)-B(x,y)-C(x,y)+D(x,y)$

43. Să se efectueze:

a) $4x^2-[8x^2-(3x^2-5)+(x^2-7)]$

b) $10x^2+[x^2-2x-(x^2-3x)-5x^2]$

c) $(5a^2-3b^2)-[-(a^2-2ab-b^2)+(5a^2-2ab-3b^2)]$

d) $3x+\{2z-[6x-(z-y)+z+(x+8y-yz)-(5x+2y)]+10z\}$.

e) $(3x+5y)-\{9x-[6x+2y-(12x-10y)]-x-(7x-4y)\}$.

f) $15a^2-\{-4a^2+[5a-8a^2-(2a^2-a)+9a^2]-3a\}$

g) $5a+\{-8b+[3c-4a-(a-c)-2a]-[9a-(7b+c]\}$

h) $(4x-2y+x^2)-\{5x-[8y-2x^2-(x+y)]-x-(3y-10x^2)\}$.

44. Perimetrul unui patrulater este egal cu $5x+y$. Prima latură este egală cu y, a doua latură întrece pe prima cu $y-x$, iar a treia latură este mai mică decît a doua cu $3x$. Să se afle latura a patra a patrulaterului.

45. Un triunghi isoscel are perimetrul egal cu 48 cm, iar baza este cu 3 cm mai mare decît una din laturile egale. Să se afle laturile triunghiului.

Înmulțirea polinoamelor

46. Se dau polinoamele: $P(x)=2+5x^2-4x$; $Q(x)=7x-8x^3+x^2-3$ și se cere să se calculeze $P(x)\cdot Q(x)$.

Rezolvare: *Metoda I.* Se înmulțește fiecare termen al unui polinom de exemplu $P(x)$, cu fiecare termen al celuilalt polinom, $Q(x)$

$P(x)\cdot Q(x)=14x-16x^3+2x^2-6+35x^3-40x^5+5x^4-15x^2-28x^2+$
$+32x^4-4x^3+12x$;

$P(x)\cdot Q(x)=-40x^5+37x^4+15x^3-41x^2+26x-6$.

Metoda a II-a. Se ordonează polinoamele după puterile descrescătoare ale variabilei x, produsele parțiale se scriu pe coloane de termeni asemenea și se adună.

$$
\begin{array}{rr}
Q(x)= & -8x^3+x^2+7x-3 \\
P(x)= & 5x^2-4x+2 \\
\hline
 & -40x^5+5x^4+35x^3-15x^2 \\
 & +32x^4-4x^3-28x^2+12x \\
 & -16x^3+2x^2+14x-6 \\
\hline
P(x)\cdot Q(x)= & -40x^5+37x^4+15x^3-41x^2+26x-6
\end{array}
$$

47. *Să se efectueze* $(x-5)(x+4)(3x+1)(4x-7)$.

Rezolvare: *Metoda I.* Se înmulțesc primele două binoame între ele, rezultatul obținut cu al treilea binom ș.a.m.d.

$$(x^3-x-20)(3x+1)(4x-7)=(3x^3-2x^2-61x-20)(4x-7)=$$
$$=12x^4-29x^3-230x^2+347x+140.$$

Metoda a II-a. Se înmulțesc separat primele două binoame între ele și ultimele două între ele.

$$(x^2-x-20)(12x^2-17x-7)=12x^4-29x^3-230x^2+347x+140.$$

48. Să se rezolve $(3x-1)(2x-3)-(x-4)(6x+5)$.

Rezolvare: Avem succesiv:

$$6x^2-11x+3-6x^2+19x+20=8x+23.$$

Probleme propuse

Să efectueze:

49. a) $(-2y+3z)\cdot 10$

b) $(-4ab+5a)\cdot 8$

c) $(3a+2b-5c)(-3)$

d) $(3a^2-4a-8)(+2)$

e) $(4x^3+7x^2-x+2)(-5)$

f) $(a-b+c)\left(-\frac{1}{2}\right)$.

50. a) $(3x^2+4y-2x)(-2x)$

b) $(8x^3-5xy^2+6xy+y^2)(+2xy)$

c) $(2x^3-3x^2+3x-1)(+4x^2y^2)$

d) $(-5xy+8x^2y^2+3x^3y^3-2)(-6x^2y^3)$

e) $(4a^3x^2y^5-7x^2y^3+3axy-a^2x^4y+2)(-5a^2xy)$

f) $(-4a^2-6a-8)\left(-\frac{1}{2}a\right)$

g) $(3x^3+9x^2+12x-1)\left(-\frac{1}{3}x^2\right)$

h) $(5x^3+10xy-4x^2-4x^2y^2+10)\left(-\frac{1}{2}xy\right)$

i) $\left(-\frac{11}{12}x^3y-\frac{3}{4}xy+1\frac{1}{6}x^2y^2+x^2\right)(-2xy)$

j) $(1-0,3ab+0,15a^2b)(-a^3b^2)$

k) $-2,4xy(2,25x^2-1,5x^3y^3+2,5y^2)$

l) $1\frac{1}{3}xy\left(\frac{3}{4}x^2y-\frac{3}{2}xy^2-\frac{5}{6}y^3-1\right)$.

51. a) $6x(3x+4y-1)-8y(5x-y)+(-2x^2+10xy-5y^2)$

b) $10x(5x^2-7y)-6x(5y+7x^2)-3xy$

c) $4a(5b-2a+1)-4(7a^2-3ab-1)-2a(3a-3b+5)$

d) $1,4xy(0,5x-0,3y^2)-5(0,4y^2-4xy)+0,2(8x^2y-5x^2y^3)$

e) $(1,5a^2-2,15)0,6a-(3,2a-1,8)0,5a^2-1,8(2,6a^2-1,8a+3,2)$

f) $4x-2(x-3)-3[x-3(4-2x)-(5x-2)+8]$

g) $3x^2-2x\{1-3x(2x-3a)-5x[a-(3x-2a)-4a^2x^2]-4\}$.

52. a) $(6a^2+5b^2)(2a^2-4b^2)$

b) $(-7x^2y-8y^2)(-x^2y+3y^2)$

c) $(2a^2-5ab+b^2)(3a^2-2ab)$

d) $(2x^3+x^2y+3xy^2+4y^3)(5x^2-y)$

e) $(2a^4+5a^3+a^2-3a+2)(2a^2+3a-1)$

f) $(2x^4-3x^3+2x^2-3x+1)\ (x^2-2x-1)$

g) $\left(\frac{1}{6}x+\frac{2}{3}y+\frac{1}{4}z\right)\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}y-\frac{2}{3}z\right)$

53. Pentru $x=2a-b+1$, $y=-3a+2b-2$, să se efectueze: a) $3x+2y$; b) $2x-xy$; c) $5x+3xy$; d) $-3x-2xy+y$; e) $2x-x(y+1)$; f) $3y(2-x)-5x(1-y)$.

Să se rezolve:

54. a) $3x^2-(3x+2)\ (x-1)$

b) $(3y+1)\ (4y-5)-(6y-11)\ (2y-7)$

c) $3(x+1\ )\ (x+2)-(3x-4)\ (x+2)$

55. a) $2(3x-1)\ (2x+5)-6(2x-1)(x+2)$

b) $7(2x-5)+[-5(7x-2)-2(5x-7)]$

c) $(2x-25)-3x+[8x+5(6-x)]$

d) $10x-\{6x-2[3x-4(1-x)]-(9x+8)\}$

56. Să se efectueze:

a) $(2x-y)\ (3x+2y)\ (4x-3y)$

b) $(3x^2+1)\ (2x^2-1)\ (x^3+2)$

c) $(a^2-a+1)\ (a^2+a+1)\ (a^4-a^2+1)$

d) $(2x+1)(3x^2-4x+5)-(3x-1)(3x^2+x-2)+(x-3)(3x^2+14x+1)$

e) $(2x+3y)(x^2-2xy+3y^2)-(-2x^2-5xy+y^2)(3x-4y)-(4x+y)(2x^2+xy-6y^2)$.

57. Trei piese de oțel cîntăresc 134 kg. Prima piesă are cu 26 kg mai mult decît a doua, iar a treia cu 18 kg mai mult decît a doua. Să se afle masa fiecărei piese.

Identități

1. *Exerciții în care se folosesc formulele:*

$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$; $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$; $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$.

Să se efectueze:

58. $(5x+2y)(5x-2y)$.

Rezolvare: $(5x+2y)(5x-2y)=(5x)^2-(2y)^2=25x^2-4y^2$.

59. $[(2x+1)+4y]\cdot[(2x+1)-4y]$.

Rezolvare: Avem succesiv:

$[(2x+1)+4y][(2x+1)-4y]=(2x+1)^2-(4y)^2=4x^2+4x+1-16y^2$.

60. $(4x+2)(16x^2+4)(4x-2)$.

Rezolvare: Se aplică proprietatea comutativității și avem: $(4x+2)(4x-2)(16x^2+4)=(16x^2-4)(16x^2+4)=256x^4-16$.

61. $\left(\frac{1}{2}x^2y^3+\frac{1}{2}x^3y\right)^2$.

Rezolvare: $\left(\frac{1}{2}x^2y^3+\frac{3}{4}x^3y\right)^2=\left(\frac{1}{2}x^2y^3\right)^2+2\left(\frac{1}{2}x^2y^3\right)\left(\frac{3}{4}x^2y\right)+\left(\frac{3}{4}x^2y\right)^2=\frac{1}{4}x^4y^6+\frac{3}{4}x^5y^4+\frac{9}{16}x^6y^2$

Să se scrie ca produs:

62. $16x^2-(2x+1)^2$.

Rezolvare: $16x^2-(2x+1)^2=(4x)^2-(2x+1)^2=(4x+2x+1)(4x-2x-1)=(6x+1)(2x-1)$.

63. $(5x+1)^2-(4x^2-12x+9)$.

Rezolvare: Avem succesiv:

$(5x+1)^2-(4x^2-12x+9)=(5x+1)^2-(2x-3)^2=(5x+1+2x-3)(5x+1-2x+3)=(7x-2)(3x+4)$.

II. Exerciţii în care se folosesc formulele: $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$; $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$; $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$; $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$.

Să se efectueze:

64. $\left(1\frac{1}{2}ab^2-\frac{5}{9}a^2b^3\right)^3$

Rezolvare:

$$\left(1\frac{1}{2}ab^2-\frac{5}{9}a^2b^3\right)^3=\left(1\frac{1}{2}ab^2\right)^3-3\left(1\frac{1}{2}ab^2\right)^2\cdot\left(\frac{5}{9}a^2b^3\right)$$

$$+3\left(1\frac{1}{2}ab^2\right)\cdot\left(\frac{5}{9}a^2b^3\right)^2-\left(\frac{5}{9}a^2b^3\right)^3=\frac{27}{8}a^3b^6-3\frac{3}{4}a^4b^7+$$

$$+1\frac{7}{18}a^5b^8-\frac{123}{729}a^6b^9.$$

65. $(2x+1)(4x^2-2x+1)(8x^3-1)$.

Rezolvare: $(2x+1)(4x^2-2x+1)(8x^3-1)=(8x^3+1)(8x^3-1)=$
$=64x^6-1$.

66. Să se scrie ca produs $8x^3-(8y^3+12y^2+6y+1)$.

Rezolvare: Avem succesiv:

$8x^3-(8y^3+12y^2+6y+1)=8x^3-(2y+1)^3=(2x)^3-(2y+1)^3=[2x-(2y+1)]$
$[4x^2+2x(2y+1)+(2y+1)^2]=(2x-2y-1)(4x^2+4xy+2x+4y^2+4y+1)$.

Probleme propuse

Să se efectueze:

67.

a) $(3y+1)(3y-1)$

b) $(5a+2b)(5a-2b)$

c) $(5x^2+y)(5x^2-y)$

d) $(4x^2+2y^2)(4x^2-2y^2)$

e) $(4x^3y^2-3x^2y)(4x^3y^2+3x^2y)$

f) $(a^4+3)(a^4-3)$

g) $\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}y\right)\left(\frac{1}{3}x-\frac{1}{2}y\right)$

h) $\left(\frac{2}{3}a^2x+\frac{4}{5}bx^2\right)\left(\frac{2}{3}a^2x-\frac{4}{5}bx^2\right)$

i) $\left(2\frac{1}{2}xy+\frac{3}{4}y\right)\left(2\frac{1}{2}xy-\frac{3}{4}y\right)$

j) $(0{,}2x+0{,}5y)\ (0{,}2x-0{,}5y)$

k) $\left(0{,}3a^2x+\frac{1}{5}a^2y^3\right)\left(0{,}3a^2x-\frac{1}{3}a^2x^3\right)$.

68.

a) $(a+b)\ (a-b)\ (a^2+b^2)$;

b) $(1+x)\ (1-x)\ (1+x^2)$;

c) $(3a-2b)\ (3a+2b)\ (9a^2+4b^2)$;

d) $(5x+1)\ (25x^2+1)\ (5x-1)$;

e) $(3ab-2a)\ (9a^2b^2+4a^2)\ (3ab+2a)$;

f) $3(2x+1)\ (2x-1)-4(3x-2)\ (3x+2)+6x(4x+1)$.

Să se scrie sub formă de produs:

69.

a) $4x^2-9y^2$

b) $9a^2x^2-4a^2y^2$

c) $64a^4y^2-1$

d) $81x^4y^2-49$

e) $\frac{1}{25}x^2-\frac{9}{64}y^2$

f) $0{,}09x^4-\frac{4}{25}y^2$

g) $0{,}16a^2-0{,}0144b^2$.

70.

a) $25x^2-(2x^2+1)^2$

b) $(3a+2)^2-4a^2$

c) $(3x+5)^2-(2x+1)^2$

d) $(4y+2)^2-(5y-3)^2$

e) $(x^2+4x+4)-4x^2$

f) $[(5z+3)^2-1]-(5z+2)$

g) $[4x+1)^2-9]-[(x+2)^2-1)]$

h) $(2a+3b)^2-4(a+b)^2$

i) $(2m+3n)^4-(m^2-6n^2)^2$.

Să se efectueze:

71.

a) $(2a+3b)^2$

b) $(2x^2+1)^2$

c) $(5x^2y+2xy)^2$

d) $(6x^3y^2+5x^2y)^2$

e) $(a^2x+a^2y)^2$

f) $\left(\frac{x}{3}+\frac{y}{4}\right)^2$

g) $\left(7x+\frac{1}{5}y\right)^2$

h) $\left(3\frac{2}{3}a+1\frac{2}{5}b\right)^2$

i) $\left(1\frac{3}{4}x^4y^2+1\frac{2}{3}x^3y^2\right)^2$

j) $\left(1\frac{2}{5}a^5b^3+0{,}4a^3b^2\right)^2$

k) $\left(3\frac{1}{3}x^6y^2+0{,}36x^4y^3\right)^2$

72.

a) $(3x-2y)^2$

b) $(4x^2-5)^2$

c) $(5a^2b-2ab)^2$

d) $(2x^3y^2-3x^2y^2)^2$

e) $\left(a-\frac{1}{2}\right)^2$

f) $\left(3x^2y-\frac{5}{6}xy\right)^2$

g) $\left(\frac{3}{5}a^5b-\frac{2}{3}a^3b^4\right)^2$

h) $\left(\frac{2}{3}x^3y^4-2\frac{1}{2}x^5y\right)^2$

i) $\left(1\frac{2}{5}a^2b^3-0{,}4a^3b^2\right)^2$

j) $(1{,}2x^2y-0{,}5x^3y^2)^2$

k) $(2{,}5x^2y^3-0{,}2x^3y)^2$.

73. Să se restrîngă în pătrate polinoamele:

a) $P(x,y)=x^2+2xy+y^2$

b) $Q(x)=x^2+2x+1$

c) $R(x,y)=4x^2+4xy+y^2$

d) $S(a,b)=a^2-6ab+9b^2$

e) $E(a,b)=25a^4b^2+20a^3b^2+4a^2b^2$

f) $E(x,y)=4x^6y^4-12x^5y^4+9x^4y^4$

g) $E(a,b)=a^2-ab+\frac{1}{4}b^2$

h) $E(a,b)=\frac{9}{25}a^{10}b^4+\frac{4}{5}a^8b^6+\frac{4}{9}a^6b^8$

i) $E(a,b)=\frac{9}{25}a^4b^2-\frac{4}{5}a^5b^4+\frac{4}{9}a^6b^6$.

74. Să se completeze și să se restrîngă în pătrate expresiile:

a) $4x^2+12xy$
b) $25x^2+1$
c) $9x^2-6xy$
d) $16a^4+25$
e) $a^6b^2+2a^4b^2$
f) $x^4y^2+4x^2$
g) $36x^4y^2+25x^6y^2$
h) $\frac{1}{4}x^4-2x^2y$
i) $\frac{9}{25}x^2+\frac{4}{9}y^2$.

75. Cu ajutorul formulelor de calcul prescurtat să se calculeze: $42\cdot38$; $38\cdot22$; $108\cdot92$; $225\cdot175$; $491\cdot509$; 52^2; 98^2; $32^2+28\cdot32$; $1\,001^2$; 125^2; 105^2; $54\cdot46-26^2+18^2$.

76. Să se efectueze:

a) $(4x+3)(4x-3)+2(x+5)^2-(x-5)^2+8x$
b) $(5x+1)^2-(2x-3)^2-(4x+2)(4x-2)$
c) $-(3a^2b-a)^2+(2a-b)(2a+b)-(2a+4a^2b)^2$
d) $\left(\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{5}y\right)^2-\left(\frac{4}{5}y+1\right)\left(\frac{4}{5}y-1\right)+(2x^2-y)^2$.

Să se dezvolte:

77. a) $(x+y)^3$
b) $(a+3b)^3$
c) $(12+3b)^3$
d) $(2x^2+3)^3$
e) $(2x^3y+3xy)^3$
f) $(5a^2b^3+4a^3)^3$
g) $\left(4x+\frac{1}{3}y\right)^3$
h) $\left(10x^2y+\frac{1}{5}xy\right)^3$
i) $\left[\left(1\frac{1}{2}a^2+\frac{2}{3}\right)^3\right.$
j) $(0{,}2x^2y+5xy)^3$
k) $\left(1\frac{1}{2}xy+1\frac{2}{3}x^2\right)^3$

78. a) $(x-y)^3$
b) $(2a-1)^3$
c) $(5a-2)^3$
d) $(5x-4y)^3$
e) $(2y^2z-1)^3$
f) $(x^2-xy)^3$
g) $\left(\frac{2}{3}x^2-\frac{1}{2}y\right)^3$
h) $\left(\frac{1}{6}x^2y-\frac{1}{2}xy\right)^3$
i) $\left(4a-\frac{1}{3}b\right)^3$
j) $\left(0{,}4a^4-\frac{2}{3}b^3\right)^3$.

79. Să se restrîngă în cuburi polinoamele:

a) $P(a,b)=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

b) $P_1(x,y)=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$

c) $P_2(a,b)=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

d) $P_3(x)=x^3-3x^2+3x-1$

e) $P_4(x,y)=8x^3+36x^2y+54xy^2+27y^3$

f) $P_5(x)=8x^3+60x^2+150x+125$

g) $P_6(x)=125x^6-150x^4+60x^2-8$

h) $P_7(a,b)=a^3+9a^2b+27ab^2+27b^3$

i) $P_8(x)=125x^3-300x^2+240x-64$

j) $P_9(x)=x^6+3x^4y+3x^2y^2+y^3$

k) $P_{10}(x)=8x^9-12x^6+6x^3-1$

l) $P_{11}(x)=64x^3+16x^2y+\frac{4}{3}xy^2+\frac{1}{27}y^3$

m) $P_{12}(x)=x^3+3x^2+3x+1$.

80. Folosind formulele de calcul prescurtat, să se calculeze: 9^3, 8^3, 12^3, 19^3, 21^3, 29^3, 33^3, 41^3, 52^3, 48^3, 101^3, 99^3, 205^3, 999^3, $1\,001^3$.

Să se descompună în factori:

81. a) x^3+y^3; b) $8x^3+1$; c) $27a^3+8b^3$; d) $1\,000z^3+64t^3$; e) $a^3+\frac{1}{8}b^3$; f) $\frac{1}{27}a^6+\frac{1}{125}b^3$; g) $0{,}125x^3+0{,}125y^3$.

82. a) x^3-y^3; b) x^3-27; c) a^6-1; d) $8a^6b^3-125a^3$; e) $\frac{1}{64}x^3-\frac{27}{216}y^3$; f) $0{,}008y^3-0{,}001z^3$.

83. a) $a^3+(a+b)^3$; b) $8x^3+(2x+5)^3$; c) $27y^3-(x-y)^3$; d) $(2x+1)^3+(2x-1)^3$; e) $(3x+y)^3-(3x-y)^3$.

84. Să se efectueze:

a) $(x+y)^2+(x-y)^2$

b) $(x+y)^2-(x-y)^2$

c) $(2a+3b)^2-(2a-3b)^2-(2a+3b)(2a-3b)$

d) $(x+4)^2-4(x+2)^2+(x+1)(x-1)$

e) $3(2-y)^2+4(y-5)^2$

f) $(x+1)^2+3(x-3)^2-5(x+2)(x-2)$

g) $-(2a-3)^2+5(1-a)^2-3(1-x)(1+x)$

h) $-(2x+5y)(2x-5y)-6(2x-5y)^2+3(5x+2y)^2$

i) $[(3x+y)^2-(x+3y)^2]\cdot 2xy$

j) $(x+5)^3-(x-5)^3-(x+5)^2$

k) $(a^2-3)^3-(a-2)(a^2+4)(a+2)$

l) $(1+a^4)^3-(1+a^4)(1-a^4+a^8)$

m) $(a^2-3)^3-(a^2+3)(a^4-3a^2+9)$

n) $(2x+1)^3+3(x-2)^2-(x-1)^3+(x+3)^2+(x+3)(x-3)$

85. Să se efectueze, folosind formulele de calcul prescurtat, produsele:

a) $(9x^2-1)(3x+1)^2$

b) $(4a-3)^2(16a^2-9)$

c) $(a+2b)(a^2-2ab+4b^2)$

d) $(a^2-5b)(a^4+5a^2b+25b^2)$

e) $(2x-4y)(4x^2+8xy+16y^2)$

f) $(3x-2)(3x+2)(9x^2+4)$

g) $(3a+2)(9a^2-6a+4)(27a^3-8)$

h) $(2a-1)(4a^2+2a+1)(8a^3+1)$.

Înmulțirea polinoamelor

Să se efectueze:

86. $(36a^3b^2-18a^2b^3+9a^2b^5):(-9a^2b)$.

Rezolvare: Se împarte fiecare termen al polinomului cu monomul dat și obținem: $-4ab+2b^2-b^4$.

87. $(x^4-x^3-13x^2+26x-8):(x^2-3x+1)$.

Rezolvare:

$$\begin{array}{l|l} x^4-x^3-13x^2+26x-8 & x^2-3x+1 \\ \underline{-x^4+3x^3-x^2} & \overline{x^2+2x-8} \\ \quad 2x^3-14x^2+26x & \\ \quad \underline{-2x^3+6x^2-2x} & \\ \quad\quad -8x^2+24x-8 & \\ \quad\quad \underline{8x^2-24x+8} & \\ \quad\quad\quad 0 & \end{array}$$

88. Să se găsească cîturile următoarelor împărțiri fără a face împărțirea:

a) $(16x^4-4):(4x+2)$.

Rezolvare:

$16x^4-4=(4x-2)(4x+2)$;

$[(4x+2)(4x-2)]:(4x+2)=4x-2$.

b) $(a^3-27):(a^2+3a+9)$.

Rezolvare:

$a^3-7=(a-3)(a^2+3a+9)$;

$[(a-3)(a^2+3a+9)]:(a^2+3a+9)=a-3$.

c) $(8x^3+27y^3):(2x+3y)$.

Rezolvare:

$8x^3+27y^3=(2x+3y)(4x^2-6xy+9y^2)$;

$[(2x+3y)(4x^2-6xy+9y^2)]:(2x+3y)=4x^2-6xy+9y^2$.

Probleme propuse

Să se efectueze:

89. a) $(21x-14y+7):(-7)$

b) $(3ab+4ac-a):(+a)$

c) $(15xy-10xz):(-5x)$

d) $(8x^2y-10xy^2):(-4xy)$

e) $(24x^3y^3+16x^2y^2):(8x^2y)$

f) $(10x^3y^5+20x^2y^3):(-5x^2y^3)$

g) $(18a^4x^3+24a^3x^4+6a^2x^5):(6a^2x^3)$

h) $(15a^3x^5-10a^4x^4-25a^5x^3):(-5a^3x^3)$

i) $(2a^2-8x+1):\left(\frac{1}{2}\right)$

j) $(-x^3+3x^2-4x):\left(-\frac{1}{3}\right)$

k) $(6a^3+6a^2-a):\left(-\frac{1}{2}a\right)$

l) $(-4y^4-6y^3+y^2):\left(\frac{1}{4}\ y^2\right)$

m) $(-16x^3y^2+4x^4y^2-12x^5y^3):\left(\frac{3}{2}\ x^3y\right)$

n) $(6a^2x^5y-9a^3x^4y^3+15a^4x^3y^2):\left(\frac{3}{2}\ a^2x^3y\right)$

o) $\left(-4x^5y^2-\frac{4}{9}\ x^4y^5+\frac{2}{3}\ x^3y^6\right):\left(\frac{2}{3}\ x^3y^2\right)$

p) $\left(\frac{3}{4}\ a^6x^3+\frac{6}{5}\ a^3x^4-\frac{9}{10}\ ax^5\right):\left(-\frac{3}{5}\ ax^3\right)$

r) $(a^4+4a^3-6a^2-8a):(0,2a)$
s) $(0,01a^4-0,02a^3+0,04a^2+0,0002a):(-0,01a)$
ș) $[4(x+y)^4-12(x+y)^3-24(x+y)^2]:4(x+y)^2$
t) $[16(x-1)^5-8(x-1)^4+32(x-1)^3]:8(x-1)^2$

90.

a) $(2x-2y):(x-y)$
b) $(4x+4y):(x+y)$
c) $(10x+10y):(5x+5y)$
d) $(3x^2-3y^2):(x+y)$
e) $(12x^2+10x-12):(2x+3)$
f) $(12x^2-20x-48):(3x+4)$
g) $(10x^2+18ax-4a^2):(x+2a)$
h) $(2x^2-2ax-12a^2):(x+2a)$
i) $(6x^2+2ax-4a^2):(3x-2a)$
j) $(6a^3+a^2-29a+21):(2a-3)$
k) $(xy-7x+2y-14):(x+2)$
l) $(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3):(a^2+b^2)$
m) $(4a^4-14a^3b-24a^2b^2-54b^4):(a^2-3ab-9b^2)$
n) $(15x^4-x^3-x^2+41x-70):(3x^2-2x+7)$.

91. Să se ordoneze în raport cu o variabilă și să se efectueze împărțirile polinoamelor următoare:

a) $(13x-x^3+6x^4-4x^2-20):(5-2x+3x^2)$
b) $(2x^3-x^2+x^4-4x+5):(-2x+3+x^2)$
c) $(27a^2x^2-20a^3x+15x^4-34ax^3):(-3ax+5x^2+4a^2)$
d) $(28x^5y-26x^3y^3-13x^4y^2+15x^2y^4):(2x^2y^2+7x^3y-5xy^3)$
e) $(17x^2-6x^4+5x^3-23x+7):(7-3x^2-2x)$
f) $(9x^5-15x^4y+13x^2y^3-21xy^4-8x^3y^2+6y^5):(3y^3+2x^2y+3x^3)$
g) $(a^5-2a^4b-4a^3b^2-5a^2b^3-23ab^4-7b^5):(3ab^2+a^3+b^3)$
h) $(-13a^3x-5a^4-13ax^3+6x^4+13a^2x^2):(2x^2-a^2-3ax)$
i) $(19ab^3-8a^2b^2-15b^4+a^4+a^3b):(3ab+a^2-5b^2)$
j) $(x^4-5x^3y-17xy^3+12y^4+13x^2y^2):(x^2+4y^2-3xy)$.

92. Să se afle cîturile următoarelo ı împărțiri fără a face împărțirea:

a) $(x^2-y^2):(x+y)$
b) $(25a^2-4b^2):(5a-2b)$
f) $(27a^6+8b^3):(9a^4-6a^2b+4b^2)$
g) $(64x^3-125y^3):(4x-5y)$

c) $\left(\frac{1}{4}a^2-1\right):\left(\frac{1}{2}a+1\right)$

d) $(16a^4-36b^2):(4a^2+6b)$

e) $(8a^3+1):(2a+1)$

h) $(a^2-6a+9):(a-3)$

i) $(a^4+4a^2y+4y^2):(a^2+2y)$

j) $(a^3-9a^2+27a-27):(a^2-6a+9)$.

93. Să se efectueze:

a) $\left[\frac{13}{7}a(a-3)-\frac{1}{7}a(-a-4)-3(2a-5)\right]:(2a-5)$

b) $[9(x-1)-5(3x-1)-2(-3x-2)]:(x^2-3)$

c) $[3(x-a)-3(x-y)+4(a-y)]:\frac{1}{2}(y-a)$.

Descompunerea polinoamelor în factori ireductibili

Să se descompună în factori ireductibili polinoamele:

94. $18a^4b^3+12a^3b^2-24a^2b$.

Rezolvare: $18a^4b^3+12a^3b^2-24a^2b=6a^2b(3a^2b^2+2ab-4)$.

95.

a) $16a^2-25b^2$.

Rezolvare: $16a^2-25b^2=(4a-5b)(4a+5b)$.

b) $8a^3+27b^3$.

Rezolvare: $8a^3+27b^3=(2a+3b)(4a^2-6ab+9b^2)$.

c) $125x^3-64y^3$.

Rezolvare: $125x^3-64y^3=(5x-4y)(25x^2+20xy+16x^2)$.

d) $9x^4y^2+30x^3y^2+25x^2y^2$.

Rezolvare: $9x^4y^2+30x^3y^2+25x^2y^2=(3x^2y+5xy)^2$.)

e) $27a^3+54a^2b^2+36ab^4+8b^5$.

Rezolvare: $27a^3+54a^2b^2+36ab^4+8b^2=(3a+2b^2)^3$.

96.

a) $10a^2+21xy-14ax-15ay$.

Rezolvare: $10a^2+21xy-14ax-15ay=(10a^2-15ay)-(14ax-21xy)=$
$=5a(2a-3y)-7x(2a-3y)=(2a-3y)(5a-7x)$.

b) $x^2+y^2-2xy-z^2$.

Rezolvare: $x^2+y^2-2xy-z^2=(x^2-2xy+y^2)-z^2=(x-y)^2-z^2=$
$=(x-y+z)(x-y-z)$.

97. $a^4-4a^3+8a^2-16a+16$.

Rezolvare: $a^4-4a^3+8a^2-16a+16=(a^4+8a^2+16)+(-4a^3-16a)=$
$=(a^2+4)^2-4a(a^2+4)=(a^2+4)\ (a^2+4-4a)=(a^2+$
$+4)\ (a-2)^2$.

Probleme propuse

Să se descompună în factori ireductibili polinoamele:

98.

a) $6a^3b^2c+12ab^2$

b) $16a^5b^3x-64a^4bx$

c) $\frac{5}{6}x^3y^2+10xy^2$

d) $\frac{3}{4}a^3b+9a^4b$

e) $15x^3y^2+10x^2y-20x^2y^3$

f) $10a^4b^3-15a^4b^2+20a^3b^4$

g) $12ax^2y+8a^3x^3y^3-24a^2xy+4axy$

h) $a(x-2)+b(x-2)-(x-2)$

i) $4a(x-1)-2b(x-1)+c(x-1)+(x-1)$

j) $x(a-b)+y(a-b)-z(b-a)$

k) $(y-a)^7-4a(y-a)^6-4a^2(a-y)^5$

l) $z(z-2)^3-2z^2(2-z)^2+z^3(z-2)$

m) $5x^m+2x^{m+1}+7x^{m+2}-11x^{3m}$

n) $8y^{2n}+11y^{2n+3}-15y^{2n-1}+23y^{2n-1}+19y^{2-n^3}$.

99.

a) $ax+by+ay+bx$

b) $ax-ay+bx-by$

c) $a^2+ab+ac+bc$

d) $x^2+xy+ax+ay$

e) $x^3+3x+3x^2+9$

f) $10ay-5by+2ax-bx$

g) $30ax-34bx-15a+17b$

h) $3x^2-3xy+3y^2-3xy$

i) $x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6$

j) $ax^2-bx^2-bx+ax-a+b$

k) $ax^2+bx^2-bx-ax+cx^2-cx$.

100.

a) $\frac{16}{25}a^4b^2-9a^2b^2$

b) $0{,}16a^2-\frac{1}{49}b^2$

c) $0{,}64a^6b^2-\frac{4}{81}a^4b^2$

d) $(x+2y)^2-\frac{9}{121}(3x+y)^2$

e) $25a^4-10a^2b+b^2$

f) $9x^2-30xy+25y^2$

g) $4x^4y^2+4x^2y+1$

h) $16x^2y^2-40x^2y+25x^2$

i) $\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{4}xy+\frac{9}{16}y^2$

j) $9x^2y^2-3xy^2+\frac{1}{4}y^2$

k) $27x^3+54x^2+36x+8$

l) $8a^6+60a^4+150a^2+125$

m) $64-96a+48a^2-8a^3$

n) $a^3+18a^2+108a+215$

o) $27a^3+125b^3$

p) x^3-64y^3

r) $125x^3-\frac{1}{8}y^3$.

101.

a) $3xy^2+6xy+3x$

b) $12x^5y+24x^4y+12x^3y$

c) $9a^4b^2-18a^3b^3+9a^2b^4$

d) $x^2+2xy+y^2-1$

e) $4a^2-20ab+25b^2-36$

f) $25x^2-4a^2+12ab-9b^2$

g) $x^5-x^3+x^2-1$

h) $x^2+2xy+y^2-z^2-2zt-t^2$

i) $m^2x^2+nx-n^2x^2-mx$

j) $30(a^2-y^2)+10(a+y)^2-100a(a+y)$

k) $5(2x+3)^4+(2x+3)^3-(8x^3+27)$.

102.

a) $2x^4-6x^3+6x^2-2x$

b) $64x^2-80x^2-100x+125$

c) x^4-2x^3+2x-1

d) $a^4-2a^3+2a^2-2a+1$

e) $25b^2-4a^2+4ab-b^2$

f) $5+10ax+5a^2x^2-5x^2-10ax-5a^2$

g) $(a-b)^2+a(b-1)^2-b(a-1)^2$

h) $(4x+2y)^3+(3x-5y)^3$.

103. Să se afle cel mai mare divizor comun și cel mai mic multiplu comun al polinoamelor:

a) $30a^2b^3$, $40a^3b^2$

b) $36a^3b^2x^4$, $48a^2b^3x^5$

c) $3ab$, $6a^2b^2$, $9a^3b^3$

d) $10ax$, $12ax^2$, $16a^2x^2y$

e) x^2-xy, $x^2-2xy+y^2$

f) $5x^2-5$, x^2-1, $1-x$

g) x^2-4, x^2-2x, $11x^2-22x$

h) $4x+8$, $4x^2-16$, x^2+4x+4

i) $2x^2-2$, $3x^2+6x+3$, $12x^2+24x+12$

j) a^2-b^2, $a+b$, $a^3-ab^2+a^2b-b^3$, $a^2+2ab+b^2$

k) a^2-2a+1, a^3-1, $8a^2-8a$, a^2-1

l) x^3+8, x^2+4x+4, $7x^2-28$

m) $8x^3-27a^3$, $4x-6a$, $4x^2-12ax+9a^2$.

Capitolul IV

Fracții algebrice

Să se simplifice fracțiile:

1. $F(x,y,z)=\dfrac{51x^7y^{11}z^2}{34x^3y^5z^6}$

Rezolvare:

$$F(x,\ y,\ z)=\frac{51x^7y^{11}z^2:17x^3y^5z^2}{34x^3y^5z^6:17x^3y^5z^2}=\frac{3x^4y^6}{2z^4}$$

2. $F(x)=\dfrac{3(x^2+2x+1)}{9x^2-9}$.

Rezolvare:

$$F(x)=\frac{3(x+1)^2}{9(x+1)(x-1)}=\frac{3(x+1)^2:(x+1)}{3^2(x+1)(x-1):(x-1)}=\frac{x+1}{3(x-1)}.$$

Să se efectueze :

3. $\frac{a^2+3a+10}{a^3-27}+\frac{a-9}{a^2-9}-\frac{2}{a+3}$.

Rezolvare : C.m.m.m.c. al numitorilor este

$$(a+3)\,(a-3)\,(a^2+3a+9).$$

Scriem succesiv : $\frac{a^2+3a+10}{a^3-27}+\frac{a-9}{a^2-9}-\frac{2}{a+3}=$

$$=\frac{(a^2+3a+10)\cdot(a+3)+(a-9)\,(a^2+3a+9)-2(a^3-27)}{(a+3)\,(a-3)\,(a^2+3a+9)}=$$

$$=\frac{a^3+3a^2+10a+3a^2+9a+30+a^3+3a^2+9a-9a^2-27a-81-2a^3+54}{(a+3)\,(a-3)\,(a^2+3a+9)}=$$

$$=\frac{a+3}{(a+3)\,(a-3)\,(a^2+3a+9)}=\frac{1}{a^3-27}.$$

4. $\frac{2a-3b+5}{3a-1}\cdot\frac{a+4}{6b-4a-10}\cdot\frac{9a-3}{a^2-16}$

Rezolvare: Se descompun în factori termenii fracţiilor, se scriu sub formă ireductibilă şi se efectuează înmulţirea :

$$\frac{2a-3b+5}{3a-1}\cdot\frac{a+4}{-2(2a-3b+5)}\cdot\frac{3(3a-1)}{(a+4)\,(a-4)}=-\frac{3}{2(a-4)}.$$

5. $\frac{1}{a^2+2a+1}-\frac{a^2+a}{a^2-1}\cdot\left(\frac{1}{a^2-a}+\frac{a}{a^2-1}\right)$.

Rezolvare : Scriem succesiv :

$$\frac{1}{(a+1)^2}-\frac{a(a+1)}{a^3-1}\cdot\left(\frac{1}{a(a-1)}+\frac{a}{(a+1)(a-1)}\right)=$$

$$=\frac{1}{+1)(a^2}-\frac{a(a+1)}{(a-1)\,(a^2+a+1)}\cdot\frac{a+1+a^2}{a(a-1)\,(a+1)}=\frac{1}{(a+1)^2}-\frac{1}{(a-1)^2}=$$

$$=\frac{(a-1)^2-(a+1)^2}{(a+1)^2\,(a-1)^2}=-\frac{4a}{(a+1)^2\,(a-1)^2}.$$

6. $E(x)=\left(\frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}+\frac{1-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\right):\left(\frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}-\frac{1-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\right)$

Rezolvare: Scriem succesiv:

$$E(x)=\left[\frac{1}{x}:\left(1+\frac{1}{x}\right)+\left(1-\frac{1}{x}\right):\frac{1}{x}\right]:\left[\frac{1}{x}:\left(1+\frac{1}{x}\right)-\left(1-\frac{1}{x}\right):\frac{1}{x}\right]=$$

$$=\left(\frac{1}{x}:\frac{x+1}{x}+\frac{x-1}{x}:\frac{1}{x}\right):\left(\frac{1}{x}:\frac{x+1}{x}-\frac{x-1}{x}:\frac{1}{x}\right)=$$

$$=\left(\frac{1}{x+1}+\frac{x-1}{1}\right):\left(\frac{1}{x-1}-\frac{x-1}{1}\right)=\frac{1+x^2-1}{x+1}:\frac{1-(x^2-1)}{x+1}=$$

$$=\frac{x^2}{x+1}\cdot\frac{x+1}{2-x^2}=\frac{x^2}{2-x^2}.$$

Probleme propuse

Să se simplifice fracțiile:

7. a) $\frac{8x}{12x}$; b) $\frac{35y^2z}{1225y^2z}$; c) $\frac{10xy}{15x}$; d) $\frac{6ay^2}{12ay}$; e) $\frac{14a^3b^2}{21a^2b^4}$;
f) $\frac{8axy}{12x^2y^2}$; g) $\frac{5a^2b}{15ab}$; h) $\frac{3ax}{6ax^2}$; i) $\frac{4x^3y^3}{4x^3y^2}$; j) $\frac{2a^4b^5c^3}{8a^3b^2c}$;
k) $\frac{12a^3xy}{18a^3x^2y^3}$; l) $\frac{4x^5y^4}{8x^7y^8}$; m) $\frac{36a^3b^2x}{81a^4b^2x^2}$.

8.
a) $\frac{3x(a+b)}{9x^2(a+b)}$; b) $\frac{7a^3b^5(x+y)}{21a^2b^3(x+y)}$; c) $\frac{a+b}{(a+b)^2}$; d) $\frac{(a-b)^2}{a-b}$; e) $\frac{(a+b)^2}{(a+b)^3}$;
f) $\frac{8a^2b^3(x-5)}{12ab^4(5-x)}$; g) $\frac{14x^5(2a-3b)}{21x^3y^4(3b-2a)}$; h) $\frac{2a-2b}{4a}$; i) $\frac{6x+6y}{12x}$; j) $\frac{4x-4y}{8a+8b}$;
k) $\frac{4x+4y}{12x+12y}$; l) $\frac{8x^2+4x-4}{2x^2+x-1}$; m) $\frac{2ax+2bx}{2ax-2bx}$; n) $\frac{x^2}{x^2+xy}$; o) $\frac{ab}{a-ab}$; p) $\frac{x^3-2x^2}{x^2-4}$;
r) $\frac{2x^2+8x+8}{(x+2)^2}$; s) $\frac{3x^2-18x+27}{(x-3)^2}$.

9.
a) $\frac{x^2-9}{x^3-6x^2+9x}$; b) $\frac{2x^2-4xy^2}{3x^3y-6x^2y^3}$; c) $\frac{a^2-a+1}{a^3+1}$; d) $\frac{a^3-8}{a^2+2a+4}$;
e) $\frac{a^3+a^2y+ax+xy}{a^2-ax+ay-xy}$; f) $\frac{9x^2+12xy+4y^2}{27x^3+8y^3}$; g) $\frac{8x^3-60ax^2+150a^2x-125a^3}{4x^2-20ax+25a^2}$;

h) $\frac{20x^2+20x+5}{80x^3+120x^2+60x+10}$; i) $\frac{27a^3-1}{18a^2+6a+2}$; j) $\frac{6ab+18a-12b-36}{4ab+12a+4b+18}$;

k) $\frac{a^2+2a^2+2a+1}{a^6-1}$; l) $\frac{x^5-ax^4-a^4x+a^5}{a^4-ax^3-a^2y^2+a^3x}$; m) $\frac{(m+1)^2x^2+8(m+1)x+16}{m^2+4m-x-4}$.

Să se efectueze:

10.

a) $\frac{5x}{9}+\frac{2x}{9}$; b) $\frac{5y}{a}+\frac{2y}{a}-\frac{8y}{a}$; c) $\frac{4x^2}{5b}+\frac{x}{5b}+\frac{x^2}{5b}-\frac{2x}{5b}$;

d) $\frac{x}{a+b}+\frac{5x}{a+b}-\frac{12x}{a+b}$; e) $\frac{x-y}{a}+\frac{x+y}{a}+\frac{x}{a}$; f) $\frac{3a-2b}{m}-\frac{a-b}{m}-\frac{2b}{m}$;

g) $\frac{4x+1}{3a}-\frac{4x-2y-3}{3a}+\frac{5x+y}{3a}$; h) $\frac{3x-4a+5}{2t}+\frac{x+2a-3}{2t}-\frac{5x-a+1}{2t}$;

i) $\frac{a+2b-1}{2t-u}-\frac{a-2b+1}{2t-1}+\frac{2a-4b+2}{2t-u}-\frac{a+2}{2t-u}$;

j) $\frac{2x-3y+1}{a-b}+\frac{3x+y-2}{a-b}-\frac{2x-3y+4}{a-b}-\frac{2x+2y-5}{a-b}$.

11.

a) $\frac{m}{2}+\frac{m}{3}$; b) $\frac{x}{4}-\frac{x}{6}$; c) $\frac{5x}{6}-\frac{3y}{4}+\frac{y}{2}-\frac{2x}{3}$;

d) $\frac{4a}{15}-\frac{3a}{10}+\frac{4a}{15}-\frac{5a}{6}$; e) $\frac{25b}{18}-\frac{4}{9}+\frac{2b}{3}-\frac{1}{4}$;

f) $2x-\frac{5x}{3}+2y+\frac{y}{2}$; g) $t+\frac{u}{2}-2u-\frac{t}{4}+1$;

h) $\frac{2x}{3}-3y+\frac{5x}{7}+2y-\frac{x}{6}$; i) $2a-1+\frac{5a}{8}-3-\frac{3a}{5}+a+\frac{7}{10}$.

12.

a) $\frac{x+2}{14}-\frac{2x-1}{2}+\frac{x-2}{7}-\frac{3x-1}{28}$

b) $\frac{t-2n+1}{4}-\frac{2t+n+3}{6}$

c) $\frac{x-2a+b}{15}-\frac{2x+4a-5b}{20}+\frac{2x+a+b}{10}-\frac{x-7a}{30}$

d) $\frac{5(2x-y)}{8}-\frac{3(x-4y)}{2}+\frac{7(x-y)}{6}$

e) $\frac{2a-3b+c}{8}-\frac{3a-b-c}{12}+\frac{a-b}{6}-\frac{2b-c}{4}-\frac{a-b-c}{2}$

f) $\frac{(x+y)^2}{6}+\frac{(x-y)^2}{12}-\frac{x^2-y^2}{4}$.

13.

a) $a-\frac{b}{x}-\frac{a}{x^2}$; b) $\frac{7}{4x}-\frac{2}{3y}+\frac{5}{2y}-\frac{1}{x}$;

c) $\frac{3c-2b}{8bc}+\frac{a-4b}{12ab}+\frac{5a-c}{6ac}-\frac{2c-3b}{3bc}-\frac{3}{4a}$;

d) $\frac{3a}{6ax^2}-\frac{x}{6a^2x}+\frac{a}{3a^2x^2}$;

e) $\frac{2x^2-x+2}{x^2y}-\frac{2x-1}{yx}$; f) $\frac{2x+5}{x+2}-\frac{6x+2}{3(x+2)}$.

14.

a) $\frac{2a-1}{a+1}-\frac{3a}{2a+2}+\frac{a}{4}$; b) $\frac{1}{2a-b}-\frac{1}{2a+b}$; c) $\frac{5b}{ax+ny}-\frac{2a}{bx+by}$;

d) $\frac{2t+5}{3t+3}-\frac{t-4}{6t+18}+\frac{3t-2}{2t+6}$; e) $\frac{3a+b}{2a+2b}+\frac{a-2b}{4a+4b}-\frac{5a-b}{3a+3b}$;

f) $\frac{7x}{a^2-9}+\frac{5x}{a-3}+\frac{x}{a+3}$; g) $\frac{7a+2b-1}{2a^2+6a}+\frac{5-3a+2b}{a^2-9}-\frac{a-2b}{a-3}$;

h) $\frac{a+1}{a^2-a}-\frac{a+2}{2a^2-2}$; i) $\frac{5}{2x^2+6x}-\frac{4-3x^2}{x^2-9}-3$;

j) $\frac{1}{2x^2+3xy}+\frac{7}{8x^2-18y^2}-\frac{1}{4xy-6y^2}$; k) $\frac{a+3}{a^2-4}+\frac{2}{a+2}-\frac{3a+1}{a^2+4a+4}$;

l) $\frac{5-b}{b^2-8b+16}+\frac{6}{5b-20}$; m) $\frac{3a+2}{a^2+2a+1}-\frac{6}{a^2-1}-\frac{3a-2}{a^2-2a+1}$;

n) $\frac{1}{a-b}+\frac{a+2b}{a^2-ab}+\frac{a-b}{a^2}$; o) $\frac{a^2+b^2}{ab}-\frac{a^2}{ab+b^2}-\frac{a^2}{a^2+ab}$.

15.

a) $\frac{1}{a-b}-\frac{3ab}{a^3-b^3}-\frac{b-a}{a^2+ab+b^2}$; b) $\frac{1}{a^3+b^3}+\frac{1}{a^2+2ab+b^2}$;

c) $\frac{2x+5}{8x^3-125}-\frac{1}{4x^2-10x+25}$; d) $\frac{a^2-ax-x^2}{x^3-a^3}+\frac{1}{x-a}+\frac{x+a}{x^2+ax+a^2}$;

e) $2x-1+\frac{2x-2x^4}{x^3-1}$.

Să se calculeze:

16.

a) $\frac{5}{3} \cdot \frac{x}{2}$; b) $\frac{8x}{21y^2} : \frac{6x^2}{7y}$; c) $\frac{8x^2y}{9ab^2} \cdot \frac{3a^2b}{4xy^2}$; d) $\frac{2ax}{yz} : \frac{12a^2x}{5yz}$;

e) $\frac{15a^3b^2}{7x^2y^2} \cdot \frac{35x^4}{18a^3}$; f) $\frac{28tz}{5a^2b^2} : \frac{14t^2z}{15a^2b^2}$; g) $\frac{3y}{10a^2x} \cdot 5ax$; h) $8bc \cdot \frac{t}{4b^2c^3}$;

i) $5ab : \frac{15a^2b}{4}$; j) $16x^2y^3 : \frac{20x^5y^4}{3a^2b}$; k) $27x^4y^2 : \frac{9x^4y}{2a}$.

17.

a) $\frac{ab+b^2}{9} \cdot \frac{3a}{b^2}$; b) $\frac{2x+2y}{x+z} \cdot \frac{3}{4x+4y}$; c) $\frac{5x+5a}{6} \cdot \frac{2}{3x+3a}$;

d) $\frac{x^2y-4y^3}{3xy^2} : \frac{x^2-3xy}{x^2y}$; e) $\frac{x^2-y^2}{6x^2y^2} : \frac{x+y}{3xy}$; f) $\frac{x+2t}{y-2t} \cdot \frac{x^2-4t^2}{5x+10t}$;

g) $\frac{x^2-xy}{x^2+xy} \cdot \frac{x^2y+xy^2}{xy}$; h) $\frac{a^2-25}{a^2-3a} : \frac{a^2+5a}{a^2-9}$; i) $\frac{a^2-4b^2}{a^2-ab} \cdot \frac{a-b}{a^2+2ab}$;

j) $\frac{6x+6y}{5x-5y} : \frac{2x+2y}{3x-3y}$; k) $\frac{am^2-an^2}{m^2+2mn+n^2} : \frac{am^2-2amn+an^2}{3m+3n}$;

l) $\frac{2a^2-2b^2}{3a+3b} \cdot \frac{6a^2-6b^2}{a^2-2ab+b^2}$; m) $\frac{5x^2-10yx}{x^2+4y^2} \cdot \frac{x^4-16y^4}{15(x-2y)^2}$;

n) $\frac{5x^2-10xy+5y^2}{10x^2-10y^2} \cdot \frac{8x-8y}{2x^2-4xy+2y^2}$.

18.

a) $\frac{36a^2-1}{12} \cdot \frac{6a-1}{216a^3-108a^2+18a-1}$; b) $\frac{x^4-y^4}{a^3+b^3} : \frac{x^2-y^2}{a^2-ab+b^2}$

c) $\frac{a^2+2ab+b^2}{a^3+b^3} : \frac{a^2-b^2}{a^2-ab+b^2}$; d) $\frac{x^3-3x^2a+3xa^2-a^3}{x^3-c^3} : \frac{x^2-2ax+a^2}{x^2+ax+a^2}$

e) $\frac{4x^2-1}{8x^3+1} : \frac{4x^2-4x+1}{4x^2-2x+1}$.

Să se efectueze operațiile:

19.

a) $\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}}$; b) $\frac{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}}{\frac{a}{b}-\frac{b}{a}}$; c) $\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{2x}}{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{2x^2}}$; d) $\frac{a-\frac{x^2}{a}}{x-\frac{a^2}{x}}$

e) $\dfrac{\dfrac{1}{1-x}+\dfrac{1}{1+x}}{\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{1}{1+x}}$; f) $\dfrac{\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{x+1}{x}}{\dfrac{x}{x+1}-\dfrac{x-1}{x}}$; g) $\dfrac{\dfrac{a+b}{a-b}}{\dfrac{(a+b)^2}{a^2-b^2}}$; h) $\dfrac{\dfrac{x-y}{x+y}+\dfrac{x+y}{x-y}}{\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}}$

i) $\dfrac{\dfrac{2a}{6-3a}+\dfrac{2a}{a+2}+\dfrac{8a}{a^2-4}}{\dfrac{a-4}{a-2}}\cdot\dfrac{3a^2-24a+48}{a^2}$; j) $\dfrac{\dfrac{1}{a^3+b^3}+\dfrac{1}{a^3-b^3}}{\dfrac{a}{a^3+b^3+2a^2b+2ab^2}}$

20.

a) $\left(\dfrac{y}{6}+\dfrac{x}{3}\right)\cdot\dfrac{3}{2}$; b) $\left(\dfrac{3}{n}-\dfrac{5}{m}\right)\cdot 2mn$; c) $\left(\dfrac{3t}{u}-\dfrac{2}{t}\right)\cdot\dfrac{tu}{6}$

d) $\left(\dfrac{5x}{2a}-\dfrac{4x}{3a}+\dfrac{x}{a}\right)\cdot 6a^2$; e) $\left(\dfrac{t}{2}-\dfrac{y}{3}\right):(-ty)$;

f) $\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{a}{3}+\dfrac{b}{4}\right)\cdot 2ab$; g) $\left(\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}\right):\dfrac{1}{xy}$;

h) $\left(\dfrac{2a}{3b}-\dfrac{4a}{b}+\dfrac{8a}{5b}\right):\dfrac{4}{b}$.

21. Să se aducă la forma cea mai simplă expresiile:

a) $E(x)=\left(\dfrac{x}{x+1}+1\right):\left(1-\dfrac{3x^2}{1-x^2}\right)$

b) $E(m)=\left(\dfrac{m+1}{2m-2}+\dfrac{6}{2m^2-2}-\dfrac{m+3}{2m+2}\right)\cdot\dfrac{4m^2-4}{3}$

c) $E(n)=\left(\dfrac{3n}{1-3n}+\dfrac{2n}{3n+1}\right):\dfrac{6n^2+10n}{1-6n+9n^2}$

d) $E(t)=\left(\dfrac{2t}{t+1}+\dfrac{2}{t-1}+\dfrac{4t}{t^2-1}\right)\cdot\left(\dfrac{2t}{t+1}+\dfrac{2}{t-1}-\dfrac{4t}{t^2-1}\right)$

e) $E(x,y)=\left(\dfrac{2x}{2x+y}-\dfrac{4x^2}{4x^2+4xy+y^2}\right):\left(\dfrac{2x}{4x^2-y^2}-\dfrac{1}{2x-y}\right)$

f) $E(a,b)=\left(a+b-\dfrac{4ab}{a+b}\right):\left(\dfrac{a}{a+b}+\dfrac{b}{a-b}-\dfrac{2ab}{a^2-b^2}\right)$

g) $E(x)=\left(\dfrac{3x+2}{3x^2+1}-\dfrac{18x^3-x-9}{9x^4-1}+\dfrac{3x-2}{3x^2-1}\right):\dfrac{x^2+10x+25}{9x^4-1}$

h) $E(a)=\left(\dfrac{2a}{a+2}-\dfrac{2a}{3a-6}+\dfrac{8a}{a^2-4}\right):\dfrac{2a-8}{a-2}$

i) $E(t)=\left(\frac{}{1-t}-t\right):\left(1-\frac{1-2t^2}{1-t}\right)$

j) $E(x)=\left(\frac{5}{2x+3}-\frac{2}{3x-3}+\frac{2x+9}{4x^2-9}\right)\cdot\frac{4x^2+12x+9}{8}$

k) $E(x,y)=\left(\frac{x^2-xy}{x^2y+y^3}-\frac{2x^2}{y^3-xy^2+x^2y-x^3}\right)\cdot\left(1-\frac{y-1}{x}-\frac{y}{x^2}\right)$

l) $E(x)=\left(\frac{1}{x+1}-\frac{3}{x^3+1}+\frac{3}{x^2-x+1}\right)\left(x-\frac{2x-1}{x+1}\right)$

m) $E(a,\ b)=\left(\frac{3}{a-b}+\frac{3a}{a^3-b^3}\cdot\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}\right):\frac{2a+b}{a^2+2ab+b^2}:\frac{3}{a-b}$

n) $E(x)=\left(\frac{x^2+8}{x^3-8}+\frac{x}{x^2+2x+4}-\frac{1}{x-2}\right)\cdot\left(\frac{x^2}{x^2-4}-\frac{2}{2-x}\right)$

o) $E(a)=\frac{1}{a-1}+\frac{a-1}{a^2+4a+4}:\frac{a+3}{a-3}\cdot\left(\frac{a+2}{a-1}\right)^2-\frac{a+2}{a^2+2a+1}:\left(\frac{a-1}{a+1}\right)\cdot\frac{a+2}{a-1}$

p) $E(a,\ b)=(2a-1):\left\{\frac{a^2-b^2}{a^3+b^3}\cdot\left[\left(a-\frac{a^2+b^2}{b}\right):\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\right]\right\}$

r) $E(a)=\left(\frac{1}{1+\frac{1}{a}}+\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}}\right):\left(\frac{1}{\frac{1}{a}-1}-\frac{1}{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{a}}\right)$.

22. Să se arate că $\frac{1-\frac{1-x}{1+x}}{1+\frac{1-x}{1+x}}\cdot\frac{1+\frac{1+x}{1-x}}{1-\frac{1+x}{1-x}}+1=0$.

23. Se dă expresia $E(x,\ y)=\frac{x+y}{x-y}\cdot\frac{x^2-y^2}{x+y}\left(1-\frac{xy}{x+y}\right)$.

a) Să se aducă la forma cea mai simplă

b) Să se afle valoarea numerică a expresiei $E(x,y)$ pentru $x=0{,}5$, $y=-\frac{3}{4}$.

24. Să se simplifice expresia:

$$E(x,\ y)=\frac{\frac{1-x^2}{1+2y+y^2}\left(\frac{x}{1-x}-\frac{y}{1-y}\right)(x-y)}{\frac{x^2-2xy+y^2}{1-y^2}}.$$

Ecuații de gradul I

A. Ecuații de gradul I cu o necunoscută

Să se rezolve ecuațiile:

1. $3(x-1)+(x+2)^2=x^2+2(x+1)$.

Rezolvare: $3x-3+x^2+4x+4=x^2+2x+2$;

$3x+x^2+4x-x^2-2x=2+3-4$;

$5x=1$; $\quad x=\frac{1}{5}$.

2. $\frac{5x-7}{2}-\frac{2x+7}{3}=3x-\frac{49-3x}{2}$.

Rezolvare: $3(5x-7)-2(2x+7)=18x-3(49-3x)$;

$15x-21-4x-14=18x-147+9x$;

$-16x=-112$; $\quad x=7$.

3. $\frac{x-1}{x+1}=\frac{x+5}{x-2}$.

Rezolvare: $(x-1)(x-2)=(x+2)(x+5)$;

$x^2-x-2x+2=x^2+2x+5x+10$;

$-10x=8$; $\quad x=-\frac{4}{5}$.

4. $\frac{12y^2+30y-21}{16y^2-9}=\frac{6y+5}{4y+3}-\frac{3y-7}{4y-3}$.

Rezolvare: $12y^2+30y-21=(6y+5)(4y-3)-(3y-7)(4y+3)$;

$12y^2+30y-21=24y^2+20y-18y-15-12y^2+28y-9y+21$;

$9y=27$; $\quad y=3$.

5. $3a^2by - a^3b = -3ab^2y - ab^3$.

Rezolvare: $3a^2by + 3ab^2y = a^2b - ab^3$;

$y(3a^2b + 3ab^2) = a^3b - ab^3$;

$$y = \frac{ab(a^2-b^2)}{3ab(a+b)} = \frac{ab(a-b)(a+b)}{3ab(a+b)}; \quad y = \frac{a-b}{3}.$$

6. $\dfrac{3}{z-a} - \dfrac{2}{z+a} = \dfrac{3z-7a}{z^2-a^2}$.

Rezolvare: $3(z+a) - 2(z-a) = 3z - 7a$;

$3z + 3a - 2z + 2a = 3z - 7a$;

$-2z = -12a$; $\quad z = 6a$.

7. $\dfrac{a^3-1}{a^3+1} = \dfrac{a(x-1)+a^2-x}{a(x-1)-a^2+x}$.

Rezolvare: Scriem succesiv:

$$\frac{(a-1)(a^2+a+1)}{(a+1)(a^2-a+1)} - \frac{ax-a+a^2-x}{ax-a-a^2+x} =$$

$$= \frac{(a-1)(a^2+a+1)}{(a+1(a^2-a+1)} - \frac{(a-1)(x+a)}{(a+1)(x-a)} = 0;$$

$(a-1)(x-a)(a^2+a+1) - (a^2-a+1)(x+a) = 0$;

$(a-1)(2ax - 2a^3 - 2a) = 0$;

$2ax - 2a^3 - 2a = 0 \qquad x = a^2 + 1$.

8. $\dfrac{x}{x-2a} = \dfrac{x-a}{x+2a}$.

Rezolvare: $x(x+2a) = (x-2a)(x-a)$;

$x^2 + 2ax - x^2 + 3ax - 2a^2 = 0$.

$5ax - 2a^2 = 0$: $x = \dfrac{2a}{5}$.

9. $$\frac{1-\dfrac{3}{x}}{1-\dfrac{2}{x-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x}}}} = \frac{1}{2x}$$

Rezolvare: Scriem succesiv:

$$\left[1-\left(1-\frac{3}{x}\right):2\right]:\left\{x-\left[1:\left(1-\frac{1}{x}\right)\right]\right\}=\frac{1}{2x}$$

$$1-\frac{x-3x}{x}:2\Big):\left[x-\left(1:\frac{x-1}{x}\right)\right]=\frac{1}{2x};\quad\left(1-\frac{x-3}{2x}\right):\left(x-\frac{x}{x-1}\right)=\frac{1}{2x}$$

$$\frac{2x-x+3}{2x}:\frac{x^2-x-x}{x-1}=\Big)\frac{1}{2x};\quad\frac{x+3}{2x}\cdot\frac{x-1}{x^2-2x}=\frac{1}{2x};\quad\frac{x^2+3x-x-3}{2x(x^2-2x)}=\frac{1}{2x}$$

$$x^2+2x-3=x^2-2x;\quad 4x=3,\ x=\frac{3}{4}.$$

10. Să se rezolve și să se discute ecuația $(m-3)x+m-8=0$, cînd m ia diferite valori.

Rezolvare: $(m-3)x=8-m;\quad x=\dfrac{8-m}{m-3};$

cînd $m=3$, ecuația este determinată (are o soluție unică);
cînd $m\neq 3$, ecuația este imposibilă (nu are soluție).

Probleme propuse

Să se rezolve ecuațiile:

11.

a) $11x+3=25$
b) $15=-3x-3$
c) $2x-5=x-7$
d) $8t-7+7=9t-3-4t$
e) $6x-20-8x=2x+2-10-3x$
f) $18x+20-24x-5=0$
g) $2{,}4x-0{,}4+5{,}2$
h) $2{,}25x-5+3=2x-2{,}6+0.4x$
i) $2{,}9x-10{,}42-2{,}35x=5{,}38-5x-4{,}7$

12.

a) $15(x+2)-(6x+5)=6(2x+7)$
b) $2y-3-2(y-2)=10-3(y-1)$
c) $5(x-2)-6(x-2)=2(x-3)-3$

d) $6x+(2x-3)\cdot 2-(8x+1)5=43-36x$

e) $(x+2)(x-2)+5(3x-1)=(x+5)(x-1)+8x-22$

f) $(x+1)(x-2)+(x+3)(x-3)=(x-1)(x+2)+(x+3)^2$

g) $(x-3)(x-4)-2(3x-2)=(x-4)^2$

h) $12-2(x-1)^2=4(x-2)-(x-3)(2x-5)$

i) $(2x+1)^2-(x+2)^2=(3x+1)^2-(x-3)^2-5x^2-7$

j) $5(x-1)^2-2(x+3)^2=3(x+2)^2-7(6x-1)$

k) $5x-(4x+3)^2=-3x(5x+3)-x^2+20$

l) $3(x+1)^2+(x-4)^3=101+(x-3)^3$

m) $2(x-1)^3-3(2x+5)=2(x+1)^3-4x(3x+2)$

n) $(x+1)^3-(x-1)^3=6(x^2+x+1)$.

13.

a) $1-\frac{2x}{3}=2x-1$

b) $\frac{y}{4}-\frac{y}{3}=\frac{y}{4}-\frac{y}{5}+1$

c) $2\frac{1}{3}x+\frac{2}{7}x=2-\frac{1}{7}x$

d) $x+\frac{3}{4}-\frac{5x}{6}=\frac{x}{12}+2\frac{2}{3}$

e) $\frac{5-z}{8}=\frac{18-5z}{12}$

f) $\frac{y+17}{5}-\frac{5y-7}{4}=-2$

g) $y+\frac{2y-7}{2}-\frac{3y+1}{5}=5-\frac{y+6}{2}$

h) $5x-\frac{x+6}{5}+\frac{x+1}{2}=2x+\frac{3x-5}{2}$

i) $\frac{3x-2}{11}-\frac{x}{3}=\frac{3x-5}{7}-\frac{5x-3}{9}$

j) $\frac{y+4}{5}-y+5=\frac{y+3}{3}-\frac{y-2}{2}$

k) $\frac{7t-2}{3}-\frac{4}{5}(t+3)+6=\frac{5(t+2)}{2}$

l) $y-\frac{1-\frac{3y}{2}}{4}-\frac{2-\frac{y}{4}}{3}=2$.

14. Să se rezolve ecuațiile:

a) $\frac{5}{2y-3}=\frac{2}{3y-2}$

b) $\frac{x+1}{2x-1}=\frac{x-1}{2x+1}$

c) $\frac{6x+3}{3x-2}=\frac{2x+1}{x-1}$

d) $\frac{8}{3t-3}-\frac{2+t}{t-1}=-\frac{5}{2t-2}-\frac{5}{18}$

e) $\frac{14}{3z-12}-\frac{2+z}{z-4}=-\frac{3}{2z-8}-\frac{5}{6}$

f) $\frac{x+1}{8x-12}-\frac{2x+1}{4x-6}=\frac{3x-1}{2x-8}-\frac{4x-23}{12x-18}$

g) $\frac{3-x}{8-x}+\frac{8-x}{6-x}+\frac{2-x}{4-x}=\frac{10-x}{8-x}-\frac{x+2}{6-x}-\frac{5-x}{4-x}$

h) $\frac{2x-1}{2x+1}=\frac{2x+1}{2x-1}-\frac{8}{4x^2-1}$

i) $\frac{12}{1-9x^2}=\frac{1-3x}{1+3x}-\frac{1+3x}{1-3x}$

j) $\frac{4}{3x+3}-\frac{2x-11}{(x+1)^2}=\frac{3}{2x+2}$

k) $\frac{3}{x-2}-\frac{1}{2x-4}=\frac{2x-1}{(x-2)^2}$

l) $\frac{3+2x}{1+2x}-\frac{5+2x}{7+2x}=1-\frac{4x^2-2}{7+16x+4x^2}$

m) $\frac{3x-3}{2x^2-2}-\frac{2x+2}{3x^2+6x+3}=\frac{5(x-1)}{12x^2-24x+12}$

Să se rezolve ecuațiile:

15.

a) $ax+3=a$

b) $ay+3a=6a$

c) $2ax-5a=ax+a$

d) $5cx+ac=c^2x-3ac$

e) $4ay-3ab=8a^2y+7ab$

f) $a^2x+a=ax+a^2$

g) $4a^2x+8a=2ax+6a^2$

h) $2ax+2a+2b=2bx$

i) $ax-bx=a^2-b^2$

j) $3a^2bx-a^3b=-3ab^2x-ab^3$

k) $(2ax+b)^2-4abx=(2ax-b)^2+3a^2b^2$

16.

a) $\frac{2a}{x}-1=\frac{2b}{x}-9$

b) $\frac{x}{a}-\frac{a}{2a}=\frac{2x+a}{2a}-\frac{a}{x}$

c) $\frac{x+1}{a}-\frac{a}{x}=\frac{x-1}{b}+\frac{x}{a}-\frac{x}{b}$

i) $\frac{3a+3b}{x-a}-\frac{3a-3b}{x+a}=0$

j) $\frac{3}{y-b}-\frac{2}{y+b}=\frac{7y-7b}{y^2-b^2}$

k) $\frac{x+a}{2}-\frac{2}{x+a}=\frac{x-a}{2}$

d) $\frac{a+b}{x} - c = d - \frac{a-b}{x}$

e) $\frac{a}{b} + \frac{a+b}{v} = -1$

f) $\frac{2a+1}{b} - \frac{b+2}{x} = 1$

g) $\frac{x+b}{x+a} + \frac{x+a}{x-b} = 2$

h) $\frac{y+m}{m} + \frac{y}{y-m} = \frac{y-m}{m}$

l) $\frac{3}{2x+2a} - \frac{x}{x^2-a^2} = \frac{1}{4x+4a}$

m) $\frac{x-a}{x-2a-b} = \frac{x+b}{x+a+2b}$

n) $\frac{x}{a+1} + \frac{x}{a^2-1} = \frac{x}{a^3-a^2+a+1} + \frac{1}{a^3+a^2+a+1}$

17. Să se rezolve ecuațiile:

a) $\frac{x-1}{4} - \left[\frac{x+2}{3} - \left(\frac{5-x}{12} + 1\right) - 3\right] = 1$

b) $3\left\{x - \frac{3x-1}{4} - \left[1 - 2\left(x - \frac{3+x}{5}\right)\right]\right\} = 5x - 2$

c) $\frac{1-2x}{1+2x} + \frac{1+\frac{2}{x}}{1-\frac{1}{x}} = 0$

d) $3\left(\frac{2x}{5} - \frac{1}{2}\right) - \frac{4\left(x - \frac{3x-1}{6}\right)}{3} = \frac{5(x+3)}{18}$

18. Să se arate echivalența ecuațiilor următoare:

a) $2x-17 = 3(x+6)+3$ și $2(x-8)-1 = 3x+21$;

b) $(2x+1)(8x-7) = (4x-3)^2+2$ și $8(x-8)-14x+57 = 11-24x$.

19. $\frac{5x}{x^2} - \frac{3}{5x} = \frac{7x^2+14x}{10x^2}$ și $\frac{5}{x} - \frac{3}{5x} = \frac{7(x+2)}{10x}$

20. $(4x^2-9)[2(x+3)(2x-5)-17] = 3(x-4)$ și $2(x-10)+18 = 3(x-4)$.

21. $\frac{3x^2+6x}{x^2-4} + \frac{7x+14}{3(x+2)} = \frac{11x+22}{2x+4}$ și $\frac{3x}{x-2} + \frac{7}{3} = \frac{11}{2}$.

22. Să se arate care din ecuațiile de mai jos nu au soluții și care au o infinitate de soluții:

a) $5x - 15 - 3x - 6 = 2x - 25$

b) $7-4x+32-7x = 22-11x$

c) $4x-3-3x-4 = x-7$

d) $(x-4)(x-1) = (x-3)(x-2)$

e) $\frac{1}{x-2} - \frac{1}{6x-12} - \frac{1}{2x-4} = \frac{1}{3x-6}$

f) $\frac{x+1}{2x-2} = \frac{2x+1}{3x-3} - \frac{1}{4}$.

23. Să se arate pentru ce valori ale lui t următoarele ecuații au soluții pozitive:

a) $4x=3t-15$; b) $2x-4=1+5t$;

c) $\frac{t+4}{4}=\frac{x-1}{x}$; d) $4-t=\frac{2}{x-1}$.

24. Pentru ce valori ale lui m ecuațiile:

a) $m-2=\frac{3x+1}{x+1}$, b) $\frac{1}{x+1}=1-m$; c) $\frac{m(x+2)-3(m-1)}{x+1}=1$;

d) $\frac{4x-1}{x-1}=m+3$, e) $\frac{4x+5m}{3}=\frac{5x-2m}{5}$

au soluții negative.

25. Să se rezolve, apoi să se discute după valorile lui m ecuațiile următoare:

a) $mx-4x+3m=7$; b) $mx-m=3x-5$;

c) $2mx+3=2m-x$; d) $x-m=\frac{x-1}{m}$,

e) $\frac{9x}{20m}+\frac{x}{20}-1=-m+\frac{(m+9)x}{20}$,

f) $\frac{1}{x-2}+\frac{m}{x-5}+\frac{3}{(x-2)(x-5)}=0$.

B. Probleme de gradul I cu o necunoscută

26. *Intr-un an s-a lucrat în agricultură cu* 186 000 *de tractoare semănători și combine. Să se afle cîte combine semănători și tractoare au fost dacă numărul combinelor este mai mic cu* 1 600 *decît* $\frac{3}{5}$ *din numărul semănătorilor, iar numărul tractoarelor întrece cu* 16 000 *numărul semănătorilor.*

Rezolvare: Alegem ca necunoscută a problemei numărul semănătorilor, pe care îl notăm cu x. Relațiile problemei sînt: $\frac{3}{5}x-1\,600$ nu-

mărul combinelor, $x+16\,000$ numărul tractoarelor. Ecuația problemei $x+\frac{3x}{5}-1\,600+x+16\,000=186\,000$ are soluția $x=66\,000$. Rezultă 66 000 de semănători, 38 000 de combine, 82 000 de tractoare.

27. *O cooperativă agricolă de producție a semănat în prima săptămînă* $\frac{5}{18}$ *din suprafața repartizată pentru grîul de toamnă în a doua săptămînă* $\frac{8}{27}$, *în a treia săptămînă* $\frac{12}{31}$ *din suprafața semănată în primele două săptămîni, iar în a patra săptămînă cu* 40 ha *mai puțin decît în prima săptămînă. Să se afle suprafața semănată în fiecare săptămînă.*

Rezolvare: Alegem ca necunoscută suprafața repartizată pentru grîul de toamnă, pe care o notăm cu x ha. Relațiile problemei sînt:

$\frac{5}{18}x$ ha, $\frac{8}{27}x$ ha, $\left(\frac{5}{18}x+\frac{8}{27}x\right)\frac{12}{31}$ ha, $\left(\frac{5}{18}x-40\right)$ ha, suprafețele semănate în cele patru săptămîni. Ecuația problemei $\frac{5x}{18}+\frac{8x}{27}+\left(\frac{5x}{18}+\frac{8x}{27}\right)\frac{12}{31}+\frac{5x}{18}-40=x$ are soluția $x=540$ ha și reprezintă suprafața repartizată pentru grîul de toamnă.

28. *Un biciclist a parcurs în prima zi 120 km din drum în a doua zi* $\frac{1}{4}$ *din rest și i-a rămas cu 5 km mai mult decît distanța parcursă în primele două zile. Să se afle lungimea drumului pe care îl avea de parcurs biciclistul.*

Rezolvare: Fie x numărul kilometrilor pe care trebuia să-i parcurgă biciclistul. Relațiile problemei sînt: $\frac{1}{4}(x-120)$ km, $\left(120+\frac{x-120}{4}\right)$ km, $x-\left(120+\frac{x-120}{4}\right)$ km, distanța parcursă a doua zi, în două zile, distanța rămasă. Ecuația problemei $\frac{x+360}{4}+5=\frac{3x-360}{4}$ are soluția $x=370$ km și reprezintă numărul kilometrilor parcurși de biciclist, adică lungimea drumului.

29. *O cooperativă agricolă de producție a predat grîu de 2 ori la baza de recepție. Prima dată a predat cu 6* t *mai puțin decît jumătate din can-*

titatea produsă, a doua oară 0,6 t *din cantitatea predată şi mai are în magazie* 73,6 t. *Să se afle cantitatea de grîu produsă de cooperativă şi cantitatea de grîu predată de fiecare dată.*

Rezolvare: Fie x tone jumătate din cantitatea predată. Relaţiile problemei sînt: $(x-6)$ tone, $(x-6)$ 0,6 tone predate prima dată şi a doua oară. Ecuaţia problemei $x-6+0{,}6x-3{,}6+73{,}6=2x$ are soluţia $x=160$ t. Aflăm: 320 t cantitatea de grîu produsă de cooperativa agricolă de producţie; 154 *t* de grîu predate prima dată; 92,4 *t* de grîu predate a doua oară.

30. *La o şcoală generală, numărul elevilor care au plecat în tabere reprezintă* $\frac{3}{8}$ *din numărul elevilor şcolii. Dintre aceştia* $\frac{3}{5}$ *au plecat la mare, iar restul la munte. Ştiind că numărul elevilor rămaşi este cu* 100 *mai mare decît numărul celor plecaţi să se afle cîţi elevi au mers la mare şi cîţi elevi au mers la munte.*

Rezolvare: Fie x numărul total al elevilor, $\frac{3x}{8}$ numărul elevilor plecaţi în tabere, $\frac{3x}{8}+100$ restul elevilor. Ecuaţia problemei $\frac{3x}{8}+\frac{3x}{8}+100=x$ are soluţia $x=400$. Rezultă: 90 de elevi au mers la mare, 60 de elevi au mers la munte.

31. *Un automobil pleacă la ora* 5 *din localitatea A spre localitatea B, avînd de parcurs* 220 km. *La ora* 6, *din cauza drumului micşorează viteza cu* $\frac{1}{4}$. *La ora* 7, *trebuind să urce o pantă micşorează viteza cu* $\frac{1}{3}$ *din cea precedentă şi ajunge în localitatea B la ora* 9. *Să se afle cele* 3 *distanţe parcurse de automobil cu viteze constante.*

Rezolvare: Fie x kilometri distanţa parcursă în prima oră; $\frac{3x}{4}$ kilometri distanţa parcursă în a doua oră; x kilometri distanţa parcursă în două ore. Ecuaţia problemei este: $x+\frac{3x}{4}+x=220$.

32. *O fermă agricolă a recoltat grîul astfel: în prima zi* $\frac{7}{17}$ *din suprafaţă în a doua zi* $\frac{2}{3}$ *din rest în a treia zi* $\frac{3}{4}$ *din rest în a patra zi restul de*

80 ha. *Să se afle suprafața recoltată cu grîu și cîte tone boabe de grîu s-au strîns în fiecare zi știind că producția medie la hectar este* 2 300 kg.

Rezolvare: Fie x hectare suprafața recoltată cu grîu. Relațiile problemei sînt: $\frac{7x}{17}$ ha, $\left(x-\frac{7x}{17}\right)\frac{2}{3}=\frac{20x}{51}$; $\left[x-\left(\frac{7x}{17}+\frac{20x}{51}\right)\right]\frac{3}{4}=\frac{5x}{34}$ suprafața cu grîu recoltată în prima zi, a doua zi și a treia zi. Ecuația problemei $\frac{7x}{17}+\frac{20x}{51}+\frac{5x}{34}+80=x$, are soluția $x=1\,632$. Avem: 1 632 ha suprafața fermei recoltată cu grîu:

1 545,6 t; 1 472 t; 552 t; 184 t de boabe grîu recoltate în prima zi, a doua zi, a treia zi și a patra zi.

Probleme propuse

33. Dacă scădem 8 dintr-un număr necunoscut și înmulțim diferența cu 12, iar la produsul obținut adăugăm dublul numărului necunoscut, obținem 44. Să se afle numărul necunoscut.

34. Suma a 3 numere naturale consecutive este 42. Să se afle aceste numere.

35. Tata, mama și fiul au împreună 96 de ani. Tatăl este cu 8 ani mai în vîrstă decît mama, iar fiul este cu 20 de ani mai tînăr decît mama. Să se afle cîți ani are fiecare.

36. Dacă la fracția $\frac{2}{5}$ mărim numărătorul cu un număr și micșorăm numitorul cu același număr, fracția devine egală cu $2\frac{1}{2}$. Să se afle acest număr.

37. Dacă scădem dintr-un număr 3, 10 și 11, obținem trei diferențe care adunate dau numărul respectiv. Să se afle numărul.

38. Se dă un număr. Dacă se adună o pătrime, o treime din acest număr și 12 se obține un număr cu 3 mai mic decît numărul dat. Să se afle numărul.

39. Suma a 4 numere consecutive este egală cu 30. Să se afle cele 4 numere.

40. Un număr este format din 3 cifre. Cifra zecilor este de 2 ori mai mare decît cifra sutelor și jumătate cît cifra unităților. Suma cifrelor numărului dat este egală cu 14. Să se afle numărul.

41. Lungimea unui dreptunghi este de 2 ori mai mare decît lățimea lui. Dacă mărim fiecare dintre laturile dreptunghiului cu 1 m, aria se mărește cu 16 m². Să se afle laturile dreptunghiului.

42. Un trapez are baza mare de 5 m, baza mică de 3 m și înălțimea de 4 m. Se prelungesc laturile neparalele ale trapezului pînă se intersectează. Se cere să se calculeze înălțimile celor două triunghiuri astfel obținute.

43. Într-un triunghi oarecare, al doilea unghi este egal cu $\frac{3}{4}$ din primul unghi, iar al treilea unghi este cu 15° mai mare decît primul unghi. Să se afle mărimea fiecărui unghi.

44. Perimetrul unui triunghi isoscel este egal cu 18 dm, iar una dintre laturile egale este cu 3 dm mai mică decît baza sa. Dintr-un punct luat pe baza triunghiului se duc paralele la laturile egale. Se cere să se afle perimetrul paralelogramului astfel obținut.

45. Trei brigăzi la o cooperativă agricolă de producție au prășit într-o zi 50 ha de porumb. Prima brigadă a prășit cu 2 ha mai mult decît brigada a doua, iar brigada a treia cu 5 ha mai puțin decît prima brigadă. Cîte hectare de porumb a prășit fiecare brigadă în ziua respectivă.

46. Producția de tractoare din anul 1964 întrece cu 4 836 numărul tractoarelor produse în anul 1959 și este mai mică cu 115 față de cea din anul 1965. Știind că producția de tractoare a anilor 1959, 1964 și 1965 este de 42 787, să se afle numărul tractoarelor produse în 1959, 1964 și 1965.

47. Un magazin a vîndut într-o zi pînză de două calități și a încasat suma de 750 de lei. Un metru de pînză calitatea întîi costă 15 lei, iar un metru de pînză calitatea a doua costă 12 lei. Din pînza calitatea întîi a vîndut cu 5 m mai mult decît din pînza calitatea a doua. Să se afle cîți metri de pînză din fiecare calitate a vîndut magazinul, în aceeași zi.

48. O fermă agricolă are 1 400 de găini, 1 219 gîşte şi 756 de raţe, consumînd anual 159 828 kg de grăunţe. O găină consumă cu 12 kg mai puţin decît o raţă, iar o gîscă cu 12 kg mai mult decît o raţă (anual). Cîte kilograme de grăunţe consumă anual găinile, raţele şi gîştele?

49. Siderurgia din ţara noastră se dezvoltă în direcţia creşterii rapide a producţiei de metal. În 1975 se vor produce 19,1 milioane tone de oţel, laminate şi ţevi. Producţia de oţel va fi de $1\frac{2}{5}$ ori mai mare decît producţia de laminate, iar producţia de ţevi va fi cu 6,4 milioane tone mai mică decît producţia de laminate.

Să se afle cîte tone de oţel, laminate şi ţevi se vor produce în anul 1975.

50. Dintr-un balot de stofă s-a vîndut în prima zi, $\frac{1}{3}$, în a doua zi $\frac{1}{4}$ şi au rămas 15 m de stofă. Să se afle cîţi metri de stofă a avut balotul. Cîţi metri de stofă s-au vîndut în prima zi şi în a doua zi?

51. Colectivul de furnalişti, cocsari şi turnători de la Uzina „Victoria"-Călan a u dat peste plan 373 t de fontă, semicocs şi piese turnate. Furnaliştii au dat cu 36 t mai mult decît muncitorii de la semicocserie, iar turnătorii cu 77,9 t de piese mai puţin decît muncitorii de la semicocserie. Să se afle numărul tonelor date peste plan de furnalişti, de muncitorii de la semicocserie şi de muncitorii de la turnătorie.

52. Numărul tractoarelor existente în anul 1963 a fost cu 60 951 mai mare decît în anul 1938. Numărul tractoarelor în anul 1965 a fost cu 93 451 mai mare decît numărul tractoarelor din anul 1938. Raportul dintre numărul tractoarelor din anul 1963 şi celor din 1965 este egal cu $\frac{2}{3}$. Să se afle numărul tractoarelor din anii 1938, 1963, 1965.

53. Producţia medie anuală pe ţară în perioada 1966—1970 la porumb va fi cu 2 400 mii tone mai mare decît cea de grîu şi secară. Raportul dintre producţia de porumb şi grîu-secară este egal cu $\frac{19}{13}$. Să se afle producţia medie anuală în mii tone în perioada 1966—1970, la grîu-secară şi porumb.

54. Pentru acțiunile social-culturale la noi în țară s-a cheltuit în medie pentru o familie alcătuită din 4 persoane în anul 1959 de 3 ori mai mult decît în anul 1950, iar în anul 1963 cu 3 120 de lei mai mult decît în anul 1950. Raportul dintre sumele cheltuite în anii 1959 și 1963 este egal cu $\frac{33}{50}$. Să se afle sumele cheltuite în anii 1950, 1959 și 1963 pentru o familie compusă din 4 persoane.

55. În primele șase luni ale unui an siderurgiștii din Hunedoara au dat peste plan 136 960 t de fontă, oțel și laminate finite. Producția de laminate este cu 3 650 t mai mare decît cea de fontă. Diferența dintre producția de oțel și fontă este de 23 570 t. Să se afle cîte tone de fontă, oțel și laminate finite au produs peste plan siderurgiștii din Hunedoara.

56. Raportul dintre numărul locomotivelor Diesel electrice de 2 100 CP produse în anii 1964 și 1965 este $\frac{17}{22}$. Știind că în anul 1965 producția realizată este cu 25 mai mare decît în anul 1964, să se afle numărul locomotivelor Diesel realizate în anii 1964 și 1965.

57. Într-o școală generală în clasa a V-a sînt cu 5 elevi mai mulți decît în clasa a VI-a, în clasa a VII-a sînt cu 3 elevi mai puțini decît în clasa a VI-a, iar în clasa a VIII-a sînt cu 12 elevi mai mulți decît în clasa a VII-a. Să se afle numărul elevilor din fiecare clasă, știind că în clasele V—VIII sînt 395 de elevi.

58. Într-un magazin în cursul unei zile s-a încasat aceeași sumă pentru pînza și mătasea vîndută. Un metru de pînză costă 12 lei, iar un metru de mătase cu 6 lei mai mult. Știind că s-a vîndut mătase cu 80 m mai puțin decît pînză, să se afle cît s-a încasat pentru pînza și mătasea vîndută și numărul metrilor vînduți din fiecare.

59. Un palton, un costum de haine și o pereche de pantofi costă 2 312 lei. Paltonul costă cu 226 de lei mai mult decît costumul, iar costumul, cît întreitul pantofilor. Să se afle cît costă costumul, paltonul și pantofii.

60. Un pionier are la C.E.C. 68 de lei, pe care i-a depus în 3 rînduri. Prima dată a depus 0,75 din ceea ce a depus a treia oară, iar a

doua oară de 2,5 ori mai mult decît a treia oară. Să se afle ce sumă a depus pionierul de fiecare dată.

61. La o cooperativă agricolă de producție, terenul repartizat pentru grîu este cu 120 ha mai mare decît terenul repartizat pentru porumb și zarzavat. Terenul repartizat pentru porumb este $\frac{2}{5}$ din terenul repartizat pentru grîu, iar terenul pentru zarzavat este cu 40 ha mai mic decît cel pentru porumb. Să se afle cîte hectare din terenul cooperativei s-au repartizat pentru grîu, porumb și zarzavat.

62. La o fermă agricolă s-au recoltat de pe terenul grădinii de zarzavat 22 098 q de legume (ardei, varză și roșii). Terenul cultivat cu varză a fost de 5 ori mai mare decît terenul cultivat cu ardei, iar terenul cultivat cu roșii este cu 40 ha mai mare decît cel cultivat cu ardei. Recolta medie la ha a fost 118,8 q de roșii, 135,6 q de varză și 70,5 q de ardei. Să se afle:

a) Care este suprafața terenului cultivat cu varză, ardei și roșii ?

b) Cîte kilograme de varză, ardei și roșii s-au recoltat ?

63. O uzină de superfosfat și acid sulfuric în primele luni ale anului a dat peste plan 7 061 t de substanțe chimice, și anume: superfosfat cu 700 t mai mult decît acid sulfuric și fluorosilicat cu 3 069 t mai puțin decît superfosfat. Să se afle cîte tone superfosfat, acid sulfuric și fluorosilicat a dat uzina peste plan.

64. O șină lungă de 8,8 m a fost tăiată în 3 părți. Partea a doua este de 1,2 ori mai lungă decît prima și partea a treia reprezintă 0,75 din lungimea părții a doua. Să se afle lungimea fiecărei părți.

65. Cantitatea de 40 l apă sărată conține 3,4 kg de sare. Să se afle cîți l de apă curată trebuie adăugați pentru ca 40 l din noul amestec să conțină 2 kg sare.

66. O bucată de platină cu densitatea de 20,88 g/cm³ s-a legat cu o bucată de plută care are densitatea 0,24 g/cm³. Densitatea sistemului obținut este de 0,48 g/cm³. Să se afle cît cîntărește bucata de plută dacă bucata de platină cîntărește 87 g.

67. Asupra unei pîrghii de ordinul I lucrează două forțe, una de 9 kgf și alta de 11 kgf. Distanța dintre punctele de aplicație ale for-

ţelor este 80 cm. Să se afle lungimea braţelor pîrghiei pentru poziţia de echilibru.

68. Braţele unei pîrghii sînt $OA = 30$ cm, $OB = 70$ cm. În A este aplicată o forţă de 12 kgf, iar în B o forţă de 8 kgf. Vrem să mărim braţele pîrghiei cu aceeaşi lungime. Să se afle această lungime pentru poziţia de echilibru.

69. Dintr-un parchet forestier s-au transportat în prima zi $\frac{2}{5}$ din cantitatea de buşteni aflată în stoc, în a doua zi s-a transportat jumătate din cantitatea primei zile, iar în a treia zi $\frac{1}{3}$ din rest şi a rămas în parchet 13,80 m^3 de buşteni. Să se afle care a fost cantitatea iniţială de buşteni din parchetul forestier.

70. Într-un magazin s-a adus stofă cu 210 lei metru şi stofă cu 360 de lei metru şi s-a plătit 61 200 de lei. Să se afle cîţi metri de stofă din fiecare fel s-au adus în magazin dacă balotul de stofă cu 210 lei metrul este cu 20 m mai mare.

71. Într-un bazin sînt 185 t de benzină, iar în altul 237 t de benzină. Din primul bazin se scot cîte 15 t de benzină pe zi, iar din al doilea cîte 18 t de benzină pe zi. După cîte zile va rămîne în al doilea bazin $1\frac{1}{2}$ ori mai multă benzină decît în primul.

72. O brigadă a unei cooperative agricole de producţie trebuia să altoiască după planul stabilit 50 de butuci de vie zilnic. Brigada a altoit în fiecare zi 60 de butuci şi a terminat lucrarea cu 3 zile înainte de termenul planificat, depăşind planul cu 240 de butuci de vie altoiţi. Să se afle numărul butucilor de vie altoiţi de brigadă.

73. O brigadă de 64 de muncitori ar fi terminat o lucrare în 39 de zile. După 9 zile de la începerea lucrului a venit în ajutor o altă brigadă şi astfel lucrarea s-a terminat cu 14 zile înainte de termen. Să se afle cîţi muncitori a avut brigada a doua.

74. Două brigăzi formate din 35 de tractorişti au arat 6 004 ha teren în 19 zile. Fiecare tractorist din prima brigadă a arat 8 ha pe zi, iar unul din brigada a doua 10 ha pe zi. Se cere să se afle:

a) Cîţi tractorişti au fost în fiecare brigadă? b) Cîte hectare a arat fiecare brigadă?

75. O cooperativă agricolă de producție are două parcele vecin pentru semănat grîu și porumb. Prima parcelă este de 4 ori mai mare decît a doua. Dacă prima parcelă s-ar micșora cu 12 ha și acestea s-ar adăuga la a doua parcelă, atunci parcela a doua este $\frac{2}{3}$ din partea rămasă la prima parcelă. Să se afle cîte hectare are fiecare parcelă.

76. Un curier a parcurs un drum cu viteza de 8/km h. El s-a întors înapoi pe alt drum, care era cu 3 km mai lung decît primul. La întoarcere curierul a mers cu viteza de 9 km/h și i-a trebuit cu $\frac{1}{8}$ oră mai mult decît la dus. Să se afle lungimea fiecărui drum.

77. Pentru electrificarea a 4 sate dintr-o comună de deal au fost necesari 208 000 m de cablu. La primul sat cu 16 m mai mult decît pentru al doilea, la al treilea sat $\frac{5}{8}$ din cablul folosit la primul și la al patrulea sat de $1\frac{1}{2}$ ori mai mult decît la primul. Să se afle cablul necesar fiecărui sat.

78. În 3 magazii ale unei cooperative agricole de producție erau 207 t de grîu. După ce din fiecare magazie s-a transportat la baza de recepție aceeași cantitate de grîu, în prima magazie a rămas $25\frac{1}{2}$ t, în a doua magazie 35,5 t, și în a treia magazie 38 t. Să se afle cîte tone de grîu au fost depozitate la început în fiecare magazie.

79. Un automobil a parcurs în prima zi $\frac{2}{7}$ din drumul său, în a doua zi $\frac{7}{13}$ din distanța rămasă, în a treia zi a parcurs cu 20 km mai mult decît în prima zi. Să se afle cîți kilometri a avut drumul și cît a parcurs în fiecare zi.

80. Un teren al unei cooperative agricole de producție a fost arat în prima zi jumătate și încă 2 ha, în a doua zi 25% din suprafața rămasă și ultimele 6 ha. Să se afle care a fost suprafața terenului.

81. Un strungar evidențiat primește o primă care reprezintă 28% din salariul său lunar. Această primă împreună cu salariul se ridică la suma de 1 800 de lei. Ce salariu are acest strungar și ce sumă a primit ca primă ?

82. Din terenul unei cooperative agricole de producție au fost repartizate pentru vii și grădini $\frac{1}{3}$, pentru grîu $\frac{1}{4}$, pentru orz $\frac{1}{5}$, pentru porumb $\frac{1}{6}$, iar pentru nutreț 90 ha. Să se afle suprafața terenului cooperativei și suprafețele repartizate pentru vii și grădini, grîu, orz, porumb.

83. Două robinete curgînd împreună pot umple un bazin în 8 ore. Cele două robinete au curs împreună două ore, apoi s-a închis primul. Al doilea robinet a curs singur 18 ore și bazinul s-a umplut. Să se afle cît timp îi trebuie fiecărui robinet pentru a umple singur bazinul.

84. Doi elevi vor să cumpere un joc de șah. Primului elev nu-i ajunge 10% din costul șahului, iar celui de-al doilea $\frac{1}{6}$ din costul lui. Cît costă jocul de șah, dacă cei doi elevi au împreună cu 22 de lei mai mult decît costul jocului de șah?

85. În perioada 1950—1963 au fost alocate industriei cu 119,7 miliarde lei mai puțin față de fondurile alocate economiei naționale. Fondurile alocate industriei reprezintă 52,5% din fondurile economiei naționale și 87% din fondurile destinate industriei au fost repartizate industriei grele. Să se afle fondurile alocate industriei grele în această perioadă.

C. Sisteme de două ecuații de gradul I cu două necunoscute cu coeficienți numerici și literali

Pentru a rezolva un sistem de ecuații gradul I, se aduce la una din formele generale:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3, \\ \text{unde } a_i,\ b_i,\ c_i,\ d_i,\ (i=1,\ 2,\ 3) \end{cases}$$

sînt numere reale cunoscute. Aceste sisteme se rezolvă prin: metoda reducerii, metoda substituției și alte metode.

Să se rezolve sistemele:

86. $\begin{cases} 4x-1+\frac{y}{3}=2x-\frac{1}{2} \\ 5x-2y+1=\frac{x}{3}+3. \end{cases}$

Rezolvare: Scriem succesiv:

$$\begin{cases} 24x-6+2y=12x-3 \\ 15x-6y+3=x+9 \end{cases}; \qquad \begin{cases} 12x+2y=3 \\ 14x-6y=6 \end{cases} \Big| \; 3;$$

$$\begin{cases} 36x+6y=9 \\ 14x-6y=6 \\ \hline 50x \quad / \quad =15 \end{cases};$$

$$x=\frac{3}{10}; \qquad y=\frac{3}{10}.$$

87. $\begin{cases} \frac{21x}{5}+6y=141-3x+y \\ \frac{87x}{5}-\frac{2y}{3}=159+\frac{3x}{5}-\frac{37y}{3}; \end{cases}$

Rezolvare: Efectuînd, avem:

$$\begin{cases} 21x+30y=705-15x+5y \\ 261x-10y=2\,385+9x-185y; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 36x+25y=705 \\ 252x+175y=2\,385 \end{cases} \Big| \; -7;$$

$$\begin{array}{r} -252x-175y=-4\,935 \\ 252x+175y=2\,385. \\ \hline 0=-2\,550 \end{array}$$

Rezultatul obținut arată că sistemul este imposibil, adică nu are soluții.

88. $\begin{cases} \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=b^5 \\ \frac{x}{a^2}+\frac{y}{b^2}=a^2b^2. \end{cases}$

Rezolvare :

$$\begin{cases} bx+ay=ab^3 \\ b^2x+a^2y=a^4b^4 \end{cases} \Big| \begin{matrix} -b \\ ; \end{matrix} \quad \begin{cases} -b^2x-aby=-ab^7 \\ b^2x+a^2y=a^4b^4 \end{cases} ;$$

$$y(a^2-ab)=a^4b^4-ab^7$$

$$y=\frac{ab^4(a^3-b^3)}{a(a-b)}; \quad y=b^4(a^2+ab+b^2); \quad x=-a^2b^3(a-b).$$

89. $\begin{cases} 5y-7x+3z=4 \\ 4x+9y-5z=30 \\ 2x-3y+6z=1. \end{cases}$

Rezolvare :

$$\begin{cases} 5y-7x+3z=4 \\ 9y+4x-5z=30 \end{cases} \Big| \begin{matrix} 5 \\ 3 \end{matrix}; \quad \begin{cases} 25y-35x+15z=20 \\ 27y+12x-15z=90 \end{cases};$$

$$(1) \quad 52y-23x=110$$

$$\begin{cases} 5y-7x+3z=4 \\ -3y+2x+6z=1 \end{cases} \Big| -2; \quad \begin{cases} -10y+14x-6z=-8 \\ -3y+2x+6z=1 \end{cases};$$

$$(2) \quad -13y+16x=-7$$

$$\begin{cases} 52y-23x=110 \\ -13y+16x=-7 \end{cases} \Big| \begin{matrix} \\ 4 \end{matrix}; \quad \begin{cases} 52y-23x=110 \\ -52y+64x=-28 \end{cases}$$

$$41x=82$$

90. $\begin{cases} \frac{18}{3x-2y}+\frac{11}{2x-3y}=13 \\ \frac{27}{3x-2y}-\frac{2}{2x-3y}=1. \end{cases}$

Rezolvare : Introducem necunoscute auxiliare, notînd : $\frac{1}{3x-2y}=u$.

$\frac{1}{2x-3y}=v$; $\begin{cases} 18u+11v=13 \\ 27u-2v=1 \end{cases}$; $\begin{matrix} u=\frac{1}{9} \\ v=1 \end{matrix}$;

$$\begin{cases} \frac{1}{3x-2y}=\frac{1}{9}; & 3x-2y=9 \\ \frac{1}{2x-3y}=1 & 2x-3y=1. \end{cases}$$

$$\begin{matrix} x=5 \\ y=3 \end{matrix}$$

Folosind metoda grafică, să se rezolve sistemele:

91. $\begin{cases} x+2y=4 \\ 2x-2y=2 \end{cases}$

Rezolvare: Sistemul se scrie sub forma

$$\begin{cases} y=\dfrac{4-x}{2} \\ y=x-1 \end{cases}$$

Se alcătuieşte tabelul de valori pentru fiecare dreaptă:

x	-1	0	1	2
y	$\frac{5}{2}$	2	$\frac{3}{2}$	1

(1) $y=\dfrac{4-x}{2}$

x	-2	0	2	3
y	-3	-1	1	2

(2) $y=x-1$.

Sistemul are soluţie unică, avînd drepte concurente (fig. 4)

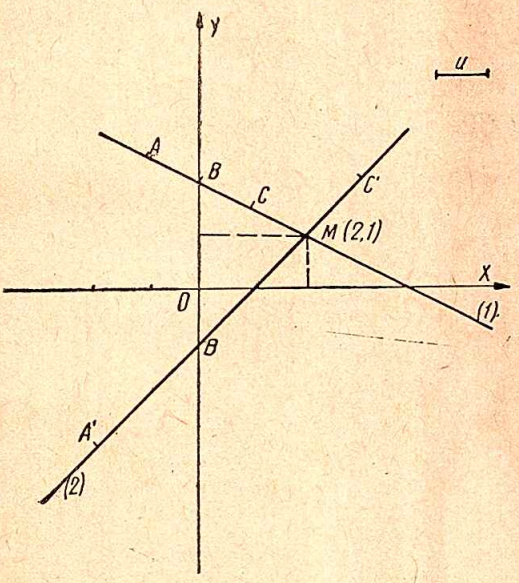


Fig. 4.

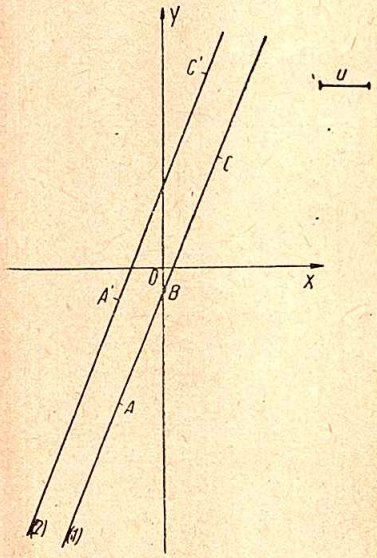


Fig. 5.

92. $\begin{cases} 5x-2y=1 \\ -10x+4y=7. \end{cases}$

Rezolvare: Sistemul se poate scrie:

$$\begin{cases} y=\dfrac{5x-1}{2} \\ y=\dfrac{10x+7}{4}. \end{cases}$$

Se alcătuiește tabelul de valori pentru fiecare dreaptă:

x	-1	0	1
$y=\dfrac{5x-1}{2}$	-3	$-\dfrac{1}{2}$	2

x	-1	0	1
$y=\dfrac{10x+7}{4}$	$-\dfrac{3}{4}$	$\dfrac{7}{4}$	$\dfrac{17}{4}$.

Sistemul nu are soluție (drepte paralele (figura 5).

Probleme propuse

Să se rezolve sistemele de două ecuații de gradul I cu două necunoscute:

93.

a) $\begin{cases} 3x+y=20 \\ 2x-2y=0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x+5y=15 \\ 3x+8y=-1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x+3y=-4 \\ 5x+6y=-7 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 5x+7y=-1 \\ 8x+7y=3 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 11x+24y=66 \\ 7x-36y=42 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 28x-48y=61 \\ 108x+96y=+1. \end{cases}$

94.

a) $\begin{cases} 12x+16y=0 \\ 15x+10y=-10 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 11x+12y-35=0 \\ 12x+13y-38=0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 18x+13y=5 \\ 16x+10y=23 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 15x+7y=23 \\ 20x+17y=23 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 6x+12=4y+4 \\ 8x+16=7y \end{cases}$

f) $\begin{cases} x+y=30 \\ 5{,}5x+6{,}3y=174{,}6 \end{cases}$

95.

a) $\begin{cases} 5(x+1)=3(y+2) \\ 6x+2(y-3)=0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4y+1=3(x-1) \\ 5(y-1)=x+1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 4(x+2)=1-5y \\ 3(y+2)=3-2x \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2(x+y)-3(x-y)=4 \\ 5(x+y)-7(x-y)=2 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 3(x-2y+1)+2(x+3y-2)=9 \\ 4(x+y-2)-2(2x-2y+3)=2 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 5(3x+y)-8(x-6y)=200 \\ 20(2x-3y)-13(x-y)=520 \end{cases}$

g) $\begin{cases} (4x+1)^2-5(y+1)=16x^2+3(x-1) \\ 3y-(2x+1)(2x-1)=-2(2x^2+x+3) \end{cases}$

h) $\begin{cases} (y+2)(y-2)-y(y+2)+(x+3)(x-2)=x^2+2 \\ x-y+x^2+y^2+1=(x+1)^2+(y-2)^2 \end{cases}$

i) $\begin{cases} (x+3)(y+5)=(x+1)(y+8) \\ (2x-3)(5y+7)=2(5x-6)(y+1) \end{cases}$

j) $\begin{cases} (x+5)(y-2)=(x+2)(y-1) \\ (x-4)(y+7)=(x-3)(y+4) \end{cases}$

k) $\begin{cases} 13(4x-5y+6)=-3(x+2y+3) \\ 3(3x+2y+1)=19(6x-5y+4) \end{cases}$

l) $\begin{cases} x+5=y-5 \\ 2(x-10)=y+10 \end{cases}$

m) $\begin{cases} x+y=25 \\ 12(6x+8y)=2\,040 \end{cases}$

n) $\begin{cases} (x-2)(y+2)=xy \\ (x+4)(y-2)=xy \end{cases}$

o) $\begin{cases} (x+10)(y-3)=xy \\ (x+15)(y-4)=xy. \end{cases}$

96.

a) $\begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 1 \\ \frac{x}{4} + \frac{2y}{3} = 8 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \frac{x}{4} + \frac{y}{4} = 2 \\ \frac{x}{5} + \frac{y}{3} = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \frac{x}{12} + \frac{x}{9} = \frac{11}{12} \\ \frac{y}{8} + \frac{x}{4} = \frac{3}{2} \end{cases}$

d) $\begin{cases} \frac{2x}{9} + \frac{y}{4} = 11 \\ \frac{5x}{12} + \frac{y}{3} = 19 \end{cases}$

e) $\begin{cases} \frac{x-1}{2} - y = 5 \\ x + \frac{1-y}{4} = 6 \end{cases}$

f) $\begin{cases} \frac{x+2y-3}{2} = \frac{2x+y+5}{5} \\ \frac{y-x}{7} = \frac{x+y+3}{4} \end{cases}$

g) $\begin{cases} \frac{x+y}{2} - \frac{2y}{3} = \frac{5}{2} \\ \frac{3x}{2} + 2y = 0 \end{cases}$

h) $\begin{cases} \frac{y+3}{2} - \frac{z-2}{3} = 2 \\ \frac{y-1}{4} + \frac{z+1}{3} = 4 \end{cases}$

i) $\begin{cases} \frac{x+y}{4} - y = \frac{x-3}{6} \\ \frac{x+1}{3} - \frac{y}{3} = \frac{x-y}{2} \end{cases}$

j) $\begin{cases} \frac{x+1}{5} - \frac{y+2}{4} = \frac{2(x-y)}{5} \\ \frac{x-3}{4} - \frac{y-3}{3} = 2y - 5 \end{cases}$

k) $\begin{cases} \frac{3x-2y}{5} - 1 = x - \frac{5x-3y}{3} \\ \frac{4x-3y}{2} - 1 = y - \frac{2x-3y}{3} \end{cases}$

l) $\begin{cases} \frac{2x+3}{3y-2} = 1 \\ x(2y-5) - 2y(x+5) = \\ = 2x + 1. \end{cases}$

97.

a) $\begin{cases} \frac{15x-2}{9y+4} = \frac{5x-4}{3y+2} \\ 3(3y+2) + 4(5x-4) = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \frac{1+3x}{4+3x} = \frac{2x-3}{2y+5} \\ 3(y-2) - 16 = 2(x-3) \end{cases}$

e) $\begin{cases} 20x + 30y = 1\,180 \\ 3\left(x + \frac{x}{5}\right) = (y+2)2 + 1{,}2 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x = y + 12 \\ \frac{35x+27y}{x+y} = 32 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \frac{238}{x} = \frac{182}{y} \\ x\left(\frac{238}{x} - 2\right) = y\left(\frac{182}{y} - 2\right) + 48 \end{cases}$

g) $\begin{cases} \frac{x}{x+3} = \frac{y-1}{y} \\ \frac{x}{x-2} = \frac{y+1}{y} \end{cases}$

d) $\begin{cases} 6(x+y) = 360 \\ 4\left(x + \frac{x}{4}\right) + 2\left(x + \frac{x}{2}\right) = 6\left(y + \frac{y}{6}\right) \end{cases}$

h) $\begin{cases} \frac{x+y}{x-y} - \frac{1}{x-y} - \frac{2x-y}{2x-2y} = \frac{15}{2} + \frac{1}{2x-2y} - \frac{x+2y-1}{4x-4y} \\ 3x - 7 = 2y \end{cases}$

98.

a) $\begin{cases} x+y = 2a \\ x-y = 2b \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x+3y = 8a \\ y = x+a \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3ax+2by = 8 \\ ax-by = -5 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x+y = 4a+5b \\ x+2y = 5a+4b \end{cases}$

e) $\begin{cases} x+y = 2a+b \\ 2x-y = a-b \end{cases}$

f) $\begin{cases} ax-by = a^2-b^2 \\ ax+by = a^2+b^2 \end{cases}$

g) $\begin{cases} ax-by = a^2+b^2 \\ x+y = 2a \end{cases}$

99.

a) $\begin{cases} \frac{x-a}{2} + \frac{y-b}{3} = a \\ \frac{x-b}{3} + \frac{y-a}{2} = b \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - a(1-y) = 0 \\ a(x-a) + y = \frac{1}{a} \end{cases}$

c) $\begin{cases} a\left(x - \frac{1}{b}\right) = b\left(y + \frac{1}{a}\right) \\ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \end{cases}$

d) $\begin{cases} \frac{x}{a+b} + \frac{y}{a-b} = a+b \\ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 2a \end{cases}$

e) $\begin{cases} \frac{x}{a+b} + \frac{y}{a-b} = \frac{1}{a+b} \\ \frac{x}{a+b} - \frac{y}{a-b} = \frac{1}{a+b} \end{cases}$

f) $\begin{cases} \frac{x}{a-b} + \frac{y}{a} = a \\ \frac{x}{b} - \frac{y}{a-b} = -b \end{cases}$

g) $\begin{cases} \frac{x}{a-b} - \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} = -\frac{y}{a+b} \\ \frac{y}{a-b} - 1 = -\frac{x}{a+b} \end{cases}$ h) $\begin{cases} \frac{x}{2a-b} - \frac{8ab}{4a^2-b^2} = \frac{y}{2a+b} \\ \frac{x}{2a-b} - \frac{8a^2+2b^2}{4a^2-b^2} = \frac{y}{2a+b} \end{cases}$

100. Să se rezolve sistemele de ecuații:

a) $\begin{cases} x+y-z=0 \\ 4x-2y+3z=1 \\ 2x-y+z+3=0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x-3y+z=11 \\ x+5y+3z=-15 \\ 4x-y-4z=30 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x-y+z=29 \\ x+3y+30z=6 \\ -x+y-z=-17 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 5y-7x+3z=4 \\ 4x+9y-5z=30 \\ 2x-3y+6z=1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x-y+z=7 \\ x+y-z=1 \\ y+z-x=3 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 2x+4y-3z=22 \\ 4x-2y+5z=18 \\ 6x+7y-z=63 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 2x+3y-5z=17 \\ 3x-4y-6z=-14 \\ 8x-7y+2z=17 \end{cases}$

h) $\begin{cases} 2x+3y+4z=61 \\ 3x+2y+z=54 \\ 5x-2y+3z=58 \end{cases}$

i) $\begin{cases} 4x-3y+2z=28 \\ 3x+2y-5z=16 \\ 2x+y-3z=10. \end{cases}$

101.

a) $\begin{cases} \frac{x+2y}{5x+6z} = \frac{7}{9} \\ \frac{3y+4z}{x+2y} = \frac{8}{7} \\ x+y+z=128 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 41 \\ \frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{5} = 31 \\ \frac{x}{4} + \frac{y}{5} + \frac{z}{6} = 25 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \frac{x}{z} = \frac{3}{5} \\ \frac{y}{z} = \frac{4}{5} \\ x+y+z=36 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x+3y-z=156 \\ \frac{x}{y} = \frac{2}{5} \\ \frac{x}{z} = \frac{2}{7} \end{cases}$

e) $\begin{cases} 6x-5y+3z=3 \\ x+\frac{5y}{3}-2z=0 \\ 2x+y+\frac{5z}{3}=\frac{19}{5} \end{cases}$

f) $\begin{cases} 10x-y+7z=13 \\ 5x-\frac{2y}{7}+z=5 \\ x-\frac{y}{10}+14z=7 \end{cases}$

g) $\begin{cases} \frac{6}{x+z}+\frac{5}{x+3y}=2 \\ \frac{15}{x+z}-\frac{4}{z-2y}=\frac{1}{2} \\ \frac{10}{x+3y}-\frac{7}{z-2y}=\frac{3}{2} \end{cases}$

h) $\begin{cases} (a-b)x+(b-c)y+(c-a)z=0 \\ cx-ay=b(c-a) \\ bz-cz=a(b-c). \end{cases}$

D. Rezolvarea problemelor cu ajutorul sistemelor de ecuații

102. *Să se afle un număr din două cifre știind că suma cifrelor este egală cu* 8, *iar dacă scădem din acest număr răsturnatul său obținem* 36.

Rezolvare: Notăm cu x cifra zecilor și cu y cifra unităților; $10x+y$ este numărul, $10y+x$ fiind numărul răsturnat. Rezolvăm sistemul:

$$x+y=8$$

$10x+y-(10y+x)=36$; $x=6$, $y=2$. Numărul cerut este 62.

103. *Un trapez dreptunghi se rotește în jurul bazei mari. Să se calculeze volumul corpului obținut, știind că aria totală a corpului este de* 653 cm². *Înălțimea și diferența bazelor trapezului exprimate în centimetri sînt egale cu soluțiile x și y ale sistemului.*

$$\begin{cases} \frac{3x-2y}{4}-\frac{3(x-y)}{2}=\frac{x+y}{7}-2 \\ \frac{x-2y}{4}+\frac{x+y}{2}=y \end{cases}$$

Rezolvare: Pentru sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} \frac{3x-2y}{4}-\frac{3(x-y)}{2}=\frac{x+y}{7}-2 \\ \frac{x-2y}{4}+\frac{x+y}{2}=y \end{cases}$$

scriem succesiv:

$$\begin{cases} 21x-14y-42x+42y-4x-4y+56=0 \\ x-2y+2x+2y-4y=0 \end{cases}$$

$$-25x+24y=-56$$

$$3x-4y=0 \quad \Big| 6$$

$$-25x+24y=-56$$

$$18x-24y=0$$

$$-7x=-56$$

$$x=8$$

$$y=6.$$

Prin rotire se obține un cilindru și un con cu baza comună (fig. 6) $x=8$ cm (raza cercului de bază $AF=r$); $y=6$ cm (înălțimea conului $ID=h_1$)

Înălțimea cilindrului $FI=h_2$ o aflăm din aria totală a corpului compusă din aria unui cerc de bază, aria laterală a cilindrului și aria laterală a conului. Cu notațiile folosite avem:

$$At=\pi r^2+2\pi rh_2+\pi rG;\quad At=\pi r^2+2\pi rh_2+\pi r\sqrt{r^2+h_1^2}$$

$$At=\pi r(r+\sqrt{r^2+h_1^2}+2h_2)=653 \text{ cm}^2$$

$$h_2=\frac{653}{2\cdot 8\cdot\pi}-\frac{8}{2}-\frac{\sqrt{8^2+6^2}}{2}$$

$$h_2=13-4-5=4 \text{ cm}.$$

Volumul corpului se compune din volumul cilindrului și volumul conului.

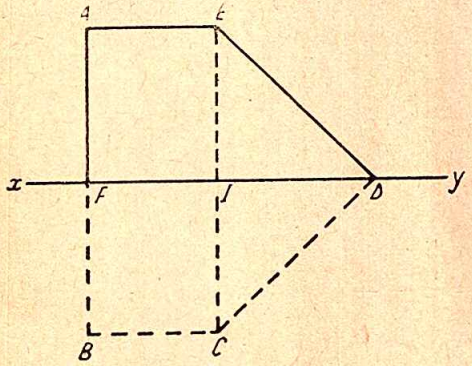


Fig. 6.

$$\text{vol corp}=\pi r^2h_2+\frac{1}{3}\pi r^2h_1;$$

$$\text{vol corp}=\pi r^2\left(h_2+\frac{1}{3}h_1\right);$$

$$\text{vol corp}=64\pi\left(4+\frac{6}{3}\right);$$

$$\text{vol corp}=6\cdot 64\pi\approx 1\,206 \text{ cm}^3.$$

104. *O piesă de metal are formă conică. Raportul dintre înălțime și generatoare este*

$\frac{3}{4}$, *raza este cu* 6 cm *mai mică decît înălțimea, iar raza și generatoarea fac împreună* 29 cm. *Să se afle masa piesei, știind că densitatea este* 7,8.

Rezolvare: Alegem ca necunoscute înălțimea și generatoarea, pe care le notăm cu x și y. Formăm sistemul:

$$\begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{3}{4} \\ x - 6 + y = 29; \end{cases}$$

rezolvăm și aflăm $x=15$, $y=20$, adică: $I=15$ cm, $G=20$ cm, $R=9$ cm. Volumul conului este 1 271,70 cm³ și masa piesei este 9,92 kg.

105. *În perioada* 1966—1970, *în industrie, agricultură, transporturi, învățămînt, cultură, știință, sănătate și construcții de locuințe s-au investit* 268,4 *miliarde de lei, astfel: în industrie de* 18 *ori mai mult decît în învățămînt, cultură, știință, sănătate; în agricultură cu* 3,5 *miliarde de lei mai mult decît în transporturi, iar pentru construcții de locuințe cu* 8,4 *miliarde lei mai puțin decît pentru transporturi. Știind că raportul dintre sumele investite pentru industrie și transporturi este egal cu* $\frac{83,7}{16,1}$ *să se afle sumele ce s-au investit pentru fiecare ramură în perioada* 1966—1970.

Rezolvare: Alegem necunoscutele x miliarde de lei investite pentru învățămînt, cultură, știință și sănătate; y miliarde lei investite pentru transporturi. Se poate forma sistemul:

$$\begin{cases} 18x + x + y + y + 3,5 + y - 8,4 = 268,4 \\ \frac{18x}{y} = \frac{83,7}{16,1}; \end{cases}$$

cu soluția $x=9,3$, $y=32,2$. Avem rezultatele: 9,3 miliarde de lei investite pentru învățămînt, cultură, știință, sănătate; 32,2 miliarde de lei investite pentru transporturi; 167,4 miliarde lei investite pentru industrie; 35,7 miliarde de lei investite pentru agricultură; 23,8 miliarde de lei investite pentru construcții de locuințe.

106. *Doi tractoriști au arat într-o săptămînă* 60 *ha. În săptămîna următoare, primul tractorist a depășit norma cu* 25% *în patru zile cu* 50% *în următoarele două zile. Al doilea tractorist în săptămîna a doua a depășit*

norma cu $\frac{1}{6}$, *arînd fiecare suprafețe egale. Să se afle cît a arat zilnic în prima săptămînă fiecare tractorist.*

Rezolvare: Notăm cu x și y numărul hectarelor arate de fiecare tractorist într-o zi în prima săptămînă. Formăm sistemul:

$$\begin{cases} 6(x+y)=60 \\ 4\left(x+\frac{25x}{100}\right)+2\left(x+\frac{50x}{100}\right)=6\left(x+\frac{y}{6}\right), \end{cases}$$ pe care îl rezolvăm, avînd soluția:

$$x=4\frac{2}{3}\ ,\ y=5\frac{1}{3}.$$

107. *Doi muncitori termină o lucrare în* 12 zile. *Dacă primul muncitor lucrează* 2 zile, *iar al doilea muncitor* 3 zile, *se realizează* 20% *din lucrare. Să se afle în cîte zile poate termina lucrarea fiecare muncitor, lucrînd singur.*

Rezolvare: Notăm cu x și y numărul zilelor în care primul și al doilea muncitor termină lucrarea considerată un întreg. Se poate forma sistemul:

$$\begin{cases} 12\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=1 \\ \frac{2}{x}+\frac{3}{y}=\frac{1}{5}. \end{cases}$$ Facem substituțiile $\frac{1}{x}=u\,;\frac{1}{y}=t$ și sistemul are soluția $x=20$, $y=30$. Deci: primul muncitor termină lucrarea în 20 de zile și al doilea muncitor în 30 de zile.

108. *O cooperativă agricolă de producție investește* 170 000 *de lei în sectorul pomicultură, zootehnie și legumicultură astfel: în zootehnie de* 2 *ori mai mult decît în pomicultură, mai puțin* 10 000 *de lei, iar pentru legumicultură* 5 000 *de lei plus jumătate din suma celor două sectoare. Să se afle sumele investite în pomicultură, zootehnie și legumicultură.*

Rezolvare: Notăm cu x, y, z sumele investite pentru sectoarele pomicultură, zootehnie și legumicultură. Formăm sistemul:

$$\begin{cases} x+y+z=170\,000 \\ y=2x-10\,000 \\ z=5000+\frac{x+y}{2}, \end{cases}$$

pe care-l rezolvăm avînd soluţiile: $x=40\,000$, $y=70\,000$, $z=60\,000$, adică sumele investite pe sectoare sînt: în pomicultură 40 000 de lei, în zootehnie 70 000 de lei şi în legumicultură 60 000 de lei.

109. *In perioada* 1966—1970, *producţia medie anuală la porumb a fost cu* 3,8 *milioane tone mai mare decît producţia medie anuală la sfecla de zahăr. Producţia la cartofi a fost cu* 9,3 *milioane tone mai mică decît producţia la grîu şi porumb luate împreună. Raportul dintre producţia la sfecla de zahăr şi grîu este egal cu* $\frac{4}{5}$, *iar raportul dintre diferenţa producţiei la grîu — sfecla de zahăr şi cartofi este egal cu* $\frac{1}{3,5}$. *Să se afle producţia medie anuală în perioada* 1966—1970 *la grîu, porumb, sfecla de-zahăr şi cartofi.*

Rezolvare: Notăm cu x, y, z, y — 3,8 milioane tone producţia medie anuală la grîu, porumb, cartofi, sfeclă-de-zahăr. Formăm sistemul:

$$\begin{cases} x+y-z=9,3 \\ \dfrac{y-3,8}{x}=\dfrac{4}{5} \\ \dfrac{x-(y-3,8)}{z}=\dfrac{1}{3,5}, \end{cases}$$

îl rezolvăm şi avem soluţia $x=5$, $y=7,8$, $z=3,5$.

Putem spune că în perioada 1966—1970 producţia medie anuală va fi: 5 milioane tone de grîu; 7,8 milioane tone de porumb; 4 milioane tone de sfeclă de zahăr; 3,5 milioane tone de cartofi.

Probleme propuse

110. Suma a două numere este 540, iar diferenţa lor este 120. Să se afle aceste numere.

111. Suma a două numere este 3 850, iar cîtul lor este 76. Să se afle aceste numere.

112. Perimetrul unui dreptunghi este egal cu 84 m. Lungimea este cu 18 m mai mare decît lăţimea. Să se afle dimensiunile dreptunghiului.

113. Diferența a două numere este egală cu 33. Dacă mărim fiecare număr cu 6, atunci numărul cel mai mare este de 4 ori numărul cel mic. Să se afle numerele.

114. Suma a două numere este egală cu 144; $\frac{1}{8}$ din primul număr adunat cu $\frac{1}{9}$ din al doilea număr este egal cu 17. Să se afle numerele.

115. Suma a două numere este egală cu 272. Dacă se împart numerele, se găsește cîtul 3 și restul 52. Să se afle aceste numere.

116. Dacă la numărătorul unei fracții se adaugă 1 și la numitorul său 3, fracția devine egală cu $\frac{9}{14}$. La aceeași fracție, dacă se scade 5 la numărător și 2 la numitor, fracția devine egală cu $\frac{1}{3}$ Să se afle fracția.

117. Pentru 26 m de șifon și 19 m de stambă s-au plătit 935 de lei. Altădată, cu aceleași prețuri, pentru 20 m de șifon și 29 m de stambă s-au plătit 935 de lei. Să se afle cît costă metrul de șifon și cît costă metrul de stambă.

118. Doi elevi au făcut economii. Al doilea elev are cu 65 de lei mai mult decît primul. Dacă al doilea elev dă primului 12 lei, îi rămîne o sumă de 2 ori mai mare ca a primului. Se întreabă ce sumă a economisit fiecare.

119. Într-o magazie sînt depozitate 582 kg de zahăr. Cantitatea de zahăr tos este de 5 ori mai mare decît cea de zahăr cubic. Să se afle cîte kilograme de zahăr tos și cubic sînt în magazie.

120. Raportul veniturilor a 2 muncitori este $\frac{8}{11}$. Mărindu-se venitul primului muncitor cu 80 de lei, iar la celui de-al doilea cu 100 lei, raportul devine $\frac{11}{15}$. Să se afle cît primește fiecare muncitor.

121. Două cooperative agricole de producție au împreună 1 416 ha de teren, pe care îl însămînțează cu grîu astfel: în prima săptămînă prima cooperativă însămînțează $\frac{4}{7}$ din teren, iar a doua $\frac{3}{8}$ din teren

și la sfîrșitul săptămînii rămîn suprafețe egale neînsămînțate. Să se afle suprafața terenului fiecărei cooperative agricole de producție.

122. Două substanțe au densitățile 0,96 și 0,75. Ce cantitate trebuie luată din fiecare substanță pentru a se obține un amestec de 42 kg cu densitatea 0,84.

123. Dacă se mărește numărătorul și numitorul unei fracții cu 2, fracția este egală cu $\frac{6}{7}$, iar dacă se micșorează numărătorul și numitorul ei cu 1, fracția devine $\frac{3}{4}$. Să se afle fracția.

124. O cooperativă agricolă de producție are două parcele de 180 ha și 150 ha și a recoltat 915 t de grîu. Să se afle cantitatea de grîu. recoltată de pe fiecare parcelă, dacă de pe 15 ha din prima parcelă s-au recoltat cu 20 t mai mult decît de pe 10 ha din a doua parcelă.

125. La Institutul de Mine din Petroșeni, în perioada 1948—1964 numărul studenților a crescut de 12 ori. Astfel, în anul 1948 a fost cu 513 mai mic decît în 1954, iar în anul 1960 cu 661 mai mic decît în 1964. Numărul studenților din 1948 adunat cu numărul studenților din 1960 este egal cu 1 053. Diferența dintre numărul studenților din anul 1964 și 1954 este 947. Să se afle cîți studenți au fost în anii 1948 1954, 1960 și 1964.

126. Într-o perioadă de timp, populația de la orașe și sate din țara noastră a cumpărat 1 418 174 de aparate radio, televizoare, frigidere și mașini electrice de spălat rufe. Numărul aparatelor de radio cumpărate a fost de 3,5 ori mai mare decît al televizoarelor, iar numărul mașinilor de spălat rufe cu 51 706 mai mare decît al frigiderelor. Diferența dintre numărul televizoarelor și numărul frigiderelor a fost 68 508. Să se afle numărul aparatelor de radio, televizoare, frigidere și mașini de spălat rufe cumpărate.

127. La sfîrșitul unui an, în fermele agricole și cooperativele agricole de producție din țara noastră existau 11,3 milioane de bovine, porcine și ovine. Numărul porcinelor era cu 0,1 milioane mai mic decît numărul bovinelor, iar numărul ovinelor cu 3,9 milioane mai mare de

cît numărul bovinelor. Să se afle numărul bovinelor, porcinelor și ovinelor existente la sfîrșitul anului.

128. Raportul a două numere este egal cu 5. Dacă primul număr se mărește cu 10 unități, este de 35 de ori mai mare ca numărul al doilea micșorat de 6 ori. Să se afle cele două numere.

129. Un elev spune unui alt elev: „Eu am de 2 ori vîrsta pe care o aveai tu cînd eu eram de vîrsta pe care o ai tu acum. Cînd tu vei fi de vîrsta pe care o am eu, vom avea împreună 36 de ani. Să se afle vîrstele celor doi elevi".

130. „Cooperativele agricole de producție din județul Dolj s-au angajat să valorifice în 1970 la fondul centralizat al statului, peste plan 32 650 tone de grîu, porumb, floarea soarelui, sfeclă de zahăr și legume.

Cantitatea de grîu reprezintă 66% din cantitatea de porumb; cea de floarea soarelui este de 1,(783) ori mai mică decît cantitatea de grîu, sfecla de zahăr este cu 500 tone mai puțin decît cantitatea de legume; iar cantitatea de porumb și cea de legume este de 16 500 tone. Să se afle numărul tonelor valorificate la fiecare fel de produse.

131. O cooperativă agricolă de producție are grîul depozitat în două magazii. S-a predat la baza de recepție 17,2 t, reprezentînd $\frac{5}{7}$ din cantitatea de grîu din prima magazie și $\frac{2}{5}$ din cantitatea de grîu din a doua magazie. Ce cantitate de grîu a fost în fiecare magazie, dacă $\frac{5}{7}$ din grîul din prima magazie întrece cu 2,8 t pe $\frac{2}{5}$ din grîul din a doua magazie.

132. În perioada 1948—1963 au fost construite la noi în țară 540 de întreprinderi și secții noi. În primii 4 ani ai șesenalului, numărul întreprinderilor construite a fost cu 200 mai mic față de numărul întreprinderilor construite în perioada 1948—1963, iar numărul secțiilor noi construite a fost cu 90 mai mic față de numărul secțiilor construite în perioada 1948—1963. Diferența dintre numărul secțiilor noi și întreprinderile construite în primii 4 ani ai șesenalului este 90. Să se afle

numărul întreprinderilor și al secțiilor noi construite în primii 4 ani ai șesenalului.

133. Uzinele „Steagul roșu" din Brașov au construit și livrat în perioada 1959—1963 vehicule între 2 și 5 t capacitate, ca: autobasculante, remorci pentru autocamioane etc. Numărul remorcilor este cu 1 200 mai mic decît numărul autobasculantelor. Raportul dintre numărul autobasculantelor și numărul altor vehicule este $\frac{5}{6}$, iar raportul dintre numărul remorcilor și altor vehicule este $\frac{2}{3}$. Să se afle numărul autobasculantelor, remorcilor și altor vehicule livrate în perioada de mai sus.

134. Instalația 4 D.H.-315 are putere de forare în adîncime cu 600 m mai mult decît instalația 3 D.H.-200. Raportul dintre numărul metrilor forați de instalația 3 D.H.-200 și numărul metrilor forați de instalația 4 D.H.-315 este $\frac{9}{10}$. Să se afle adîncimile forate de cele două instalații.

135. Producția de energie electrică din țara noastră pe cap de locuitor în 1975 va fi de 33,(3) ori mai mare față de producția din anul 1938. Știind că raportul dintre producția de energie electrică pe cap de locuitor din anii 1968 și 1975 este $\frac{181}{480}$ și că producția anului 1975 este cu 1495 kWh pe cap de locuitor mai mare decît a anului 1968, să se afle producția de energie electrică pe cap de locuitor din anii 1938, 1968 și 1975.

136. Producția de minereuri feroase în anul 1963 a fost cu 2 077 000 t mai mare decît producția de minereuri feroase din anul 1948. Producția de cărbune în anul 1963 a fost cu 7 321 000 t mai mare decît în anul 1948. Producția de minereu de fier și cărbune în anul 1948 a fost 3 155 000 t. Diferența dintre producția de cărbune și producția de minereuri de fier din anul 1963 este egală cu 7 981 000 t. Să se afle producția de minereu de fier din anii 1948—1963 și producția de cărbune din anul 1948 și 1963.

137. Producția de fontă și oțel din anii 1938, 1959 și 1963 a fost 7 093 mii tone. Producția de fontă din anul 1959 a fost cu 713 mii tone mai mare decît în anul 1938, iar în anul 1963 cu 1 573 mii tone mai mare decît în anul 1938. Producția de oțel din anul 1959 a fost cu 1 136 mii tone mai mare decît în anul 1938, iar în anul 1963 cu 2 420 mii tone mai mare decît în anul 1938. Diferența dintre producția de oțel și fontă din anul 1963 este 998 mii tone. Să se afle în mii tone: *a)* producția de fontă din anii 1938, 1959 și 1963; *b)* producția de oțel din anii 1938, 1959 și 1963.

138. În echipa zootehnică a unei cooperative agricole de producție numărul băieților este cu 2 mai mare decît numărul fetelor. Dacă ar veni 3 băieți și 2 fete, atunci numărul fetelor reprezintă $\frac{3}{4}$ din numărul băieților. Să se afle numărul băieților și al fetelor din echipă.

139. Două uzine producătoare de mașini agricole, conform planului, produc 360 de mașini pe lună. Prima uzină a îndeplinit planul cu 112%, a doua cu 110% și împreună au realizat 400 de mașini agricole pe lună. Să se afle cu cît a depășit planul pe lună fiecare uzină.

140. O lucrare este executată de 3 muncitori. Lucrarea poate fi terminată de primul și al doilea muncitor în 70 de ore, de primul și al treilea în 84 de ore și de al doilea și al treilea muncitor în 140 de ore. Să se afle:

a) În cît timp poate fi terminată lucrarea de fiecare muncitor?

b) În cît timp poate fi terminată lucrarea de cei 3 muncitori?

141. Două uzine metalurgice produc după plan 1 560 t de laminate pe lună. Știind că prima uzină a depășit planul cu 20%, iar a doua cu 25%, producînd astfel 1 910 t de laminate pe lună, să se afle cu cîte tone a depășit planul fiecare uzină.

142. De pe terenul a două loturi ale unei cooperative agricole de producție s-au strîns 360 t de trifoi. În anul următor, recolta de trifoi de pe primul lot s-a mărit cu 10%, iar de pe al doilea lot cu 15%, strîngîndu-se 404 t de trifoi. Să se afle cîte tone de trifoi s-au strîns în al doilea an de pe fiecare lot.

143. O cooperativă agricolă de producție a depozitat în două magazii 240 t de grîu. Dacă din prima magazie s-au scos $\frac{2}{5}$ din grîul depozitat, iar din a doua s-au scos 25%, în această magazie a rămas de 3 ori mai mult grîu decît în prima. Să se afle cantitatea de grîu depozitată în fiecare magazie.

144. Doi muncitori aveau de executat într-o săptămînă 360 de piese În săptămîna următoare, primul muncitor a depășit norma cu 25% în patru zile și cu 50% în următoarele două zile, iar al doilea muncitor cu $16\frac{2}{3}$% față de cît a produs zilnic în prima săptămînă. În felul acesta, fiecare muncitor produce același număr de piese. Să se afle cîte piese au produs cei doi muncitori în a doua săptămînă.

145. Două secții de la o uzină constructoare de mașini aveau de efectuat după plan 5 000 de piese pe lună. Prima secție depășește planul cu 15%, iar a doua cu 11%. După patru luni, secția a doua produce cu 2 312 piese mai mult decît prima. Să se afle:

a) Numărul pieselor planificate lunar pentru fiecare secție.

b) Numărul pieselor realizate peste plan de fiecare secție.

146. Două brigăzi de tractoriști aveau de arat 1 200 ha. Dacă prima brigadă a arat $\frac{1}{4}$ din suprafață, iar a doua 25%, atunci acestei brigăzi i-a mai rămas de arat de 3 ori mai mult teren decît primei brigăzi. Să se afle cîte hectare a avut de arat fiecare brigadă.

147. Un bazin cu o capacitate de 1 960 l este umplut într-o oră de 7 robinete cu debitele de 230 l oră și 300 l oră. Să se afle cîte robinete sînt cu debitul de 230 l oră și cîte robinete cu debitul de 300 l oră.

148. Înălțimea unei piramide cu baza un pătrat este cu 16 cm mai mare decît latura bazei, iar triplul laturii bazei este cu 8 cm mai mic decît înălțimea luată la un loc cu latura bazei. Să se afle volumul piramidei.

149. Un aliaj format din aur și argint cîntărește 200 g. Scufundat în apă, el se ușurează cu 15 g. Știind că densitatea aurului este de 19,5 și a argintului 10,5, se cere să se afle compoziția aliajului.

150. Două brigăzi într-o cooperativă agricolă de producție prășesc în 4 zile un teren cu porumb. Dacă ar lucra împreună 2 zile, ar trebui brigăzii a doua încă 6 zile pentru a termina singură prășitul. Să se afle în cîte zile ar putea să prășească acest teren fiecare brigadă.

151. Două echipe de țărani cooperatori pot prăși în 16 ore un teren cultivat cu cartofi. Prima echipă a lucrat 36 de ore, apoi a venit și a doua echipă, terminînd restul lucrului în 4 ore. Să se afle în cîte ore poate să prășească fiecare echipă terenul cultivat cu cartofi.

152. Un bazin este umplut cu apă de două robinete astfel: primul robinet curge singur 8 ore, apoi se deschide și al doilea robinet și astfel robinetele umplu bazinul după 4 ore. Dacă robinetul al doilea s-ar fi deschis cu 10,5 ore după ce a fost deschis primul, atunci împreună ar fi umplut bazinul după 3 ore. Să se afle în cîte ore poate umple bazinul fiecare robinet.

153. Două echipe de muncitori execută o lucrare în 20 de zile. Dacă prima echipă ar lucra 4 zile singură și a doua 6 zile, ar executa 25% din lucrare. Să se afle în cît timp se poate executa lucrarea de către fiecare echipă.

154. Să se afle laturile unui triunghi ABC, la care, adunînd două cîte două laturile sale, obținem 26, 32, 34.

155. Să se afle laturile unui patrulater la care, adunînd cîte trei laturi ale sale, avem: 22, 24, 27 și perimetrul egal cu 31.

156. Trei tehnicieni au primit un premiu pentru o inovație. Primul tehnician a primit jumătate din premiu mai puțin $\frac{3}{22}$ din ceea ce au primit ceilalți doi. Al doilea a primit a patra parte din premiu plus $\frac{1}{56}$ din cît au primit ceilalți doi, iar al treilea a primit 3 000 de lei. Să se afle care a fost premiul și cît a primit fiecare tehnician.

157. Un bazin este alimentat de 3 robinete. Dacă se deschid primele două robinete, bazinul se umple în 3 ore. Dacă se deschide primul și al treilea robinet, bazinul se umple în 5 ore, iar dacă se deschid cele trei robinete, bazinul se umple în 2 ore și 30 min. Capacitatea bazinului este 135 m^3. Să se afle debitul fiecărui robinet.

158. Unele unități economice siderurgice au dat peste plan, în primele 3 trimestre ale unui an, 142 000 t de fontă, oțel, laminate finite,

cărbune și minereu de fier marfă. Producția de oțel dată peste plan este cu 1 000 t mai mică decît cea de fontă, iar producția de minereu de fier marfă este cu 8 500 t mai mică decît cea de cărbune. Știind că producția de fontă, laminate finite și cărbune date peste plan este egală cu 82 500 t și raportul dintre producția de oțel și minereu de fier marfă este egal cu $\frac{6}{11}$, să se afle cîte tone au fost date peste plan din fiecare produs.

Capitolul VI

Inecuații de gradul I cu o necunoscută

1. *Se dau intervalele:* (2, 7); (—3,5); (—11, —3); [12,31]; [—4,10]; [—1, 8]. *Să se spună ce fel de intervale sînt.*

Rezolvare: Mulțimea tuturor numerelor x cuprinse între a și b $(a<x<b)$ se numește interval deschis și se notează (a, b). Mulțime tuturor numerelor x cuprinse între a și b inclusiv a și b, $(a\leqslant x\leqslant b)$ se numește interval închis și se notează $[a, b]$. Astfel, primele trei intervale sînt intervale deschise, iar ultimele trei sînt intervale închise.

2. *Mulțimea numerelor reale* x *este cuprinsă între două numere a și b, care au următoarele valori numerice:*

a) $a=3$, $b=8$ (exclusiv extremitățile intervalului);

b) $a=-3$, $b=2$ (inclusiv extremitățile intervalului);

c) $a=-5$, $b=4$ (inclusiv a, exclusiv b);

d) $a=7$, $b=13$ (exclusiv a, inclusiv b).

Să se arate ce fel de intervale sînt și să se noteze în cele două feluri cunoscute.

Rezolvare: Mulțimea tuturor numerelor x care verifică inegalitățile $a \leqslant x < b$ se notează $[a, b)$ și se numește interval închis la stînga și deschis la dreapta. Mulțimea tuturor numerelor x care verifică inegalitățile $a < x \leqslant b$ se notează $(a, b]$ și se numește interval deschis la stînga și închis la dreapta. Avem următoarele rezultate:

a) $3 < x < 8$ interval deschis $(3, 8)$;

b) $-3 \leqslant x \leqslant 2$ interval închis $[-3, 2]$;

c) $-5 \leqslant x < 4$ interval închis la stînga și deschis la dreapta $[-5, 4)$;

d) $7 < x \leqslant 13$ interval deschis la stînga și închis la dreapta $(7, 13]$.

3. *Se dau mulțimile de numere reale:* $A = \{-5, 1, 2, 7\}$; $B = \{-3, 0, 5, 8\}$; $C = \{1, 2\ 7\}$; $D = \{-3, 5, 8\}$. *Să se stabilească relația de incluziune între cele patru mulțimi date luate două cîte două.*

Rezolvare: între cele două mulțimi A și B putem avea:

mulțimea A este inclusă în mulțimea B $A \subset B$;

mulțimea A include mulțimea B $A \supset B$;

mulțimea A nu include mulțimea B $A \not\supset B$;

mulțimea A nu este inclusă în mulțimea B; $A \not\subset B$.

Între mulțimile A, B, C, D avem următoarele relații: $A \supset C$; $C \subset A$; $B \supset D$; $D \subset B$; $A \not\supset B$; $B \not\subset A$; $C \not\supset D$; $D \not\subset C$.

4. Se dau mulțimile: $A = \{-12, -5, 0, 2, 5\}$; $B = \{-8, -3, 1, 17\}$

Să se arate dacă:

a) *numărul* -5 *aparține mulțimii* A, *dar mulțimii* B?

b) *numărul* 17 *aparține mulțimii* B, *dar mulțimii* A?

Rezolvare: Ținînd seama de relația de apartenență ($\in$), avem următoarele rezultate: a) $-5 \in A$, $-5 \notin B$; b) $17 \in B$, $17 \notin A$.

5. *Se dau mulțimile:*

a) $M_1 = \{-6, -1, 3, 5\}$ și $M_2 = \{-9, -1, 3, 6\}$;

b) $N_1 = \{-11, -8, 0, 7\}$ și $N_2 = \{-7, -5, 23\}$.

Se cere să se determine reuniunea și intersecția lor.

Rezolvare: Reuniunea a două mulțimi este o a treia mulțime formată din elementele celor două mulțimi, elementele comune fiind luate o singură dată. Intersecția a două mulțimi este o a treia mulțime, formată din elemente comune; cînd mulțimile nu au elemente comune intersec-

ția lor, este o mulțime vidă ($\varnothing$). În cazul de față avem următoarele rezultate:

a) $M_1 \cup M_2 = \{-9, -6, -1, 3, 5, 6\}$; $M_1 \cap M_2 = \{-1, 3\}$;

b) $N_1 \cup N_2 = \{-11, -8, -7, -5, 0, 7, 23\}$; $N_1 \cap N_2 = \varnothing$.

6. *Să se determine mulțimea numerelor reale* x *care* verifică inecuația: $6x > 2x + 8$.

Rezolvare: Se trec termenii asemenea în fiecare parte, se reduc și avem $4x > 8$; $x > \frac{8}{4}$; $x > 2$; $x \in (2, +\infty)$.

7. *Să se determine mulțimea numerelor reale* x *care verifică simultan inecuațiile:*

$$\begin{cases} 2x > 6x + 8 \\ 4x + 3 < 2x + 1. \end{cases}$$

Rezolvare: Se parcurg simultan aceleași etape ca la exercițiul precedent:

$$\begin{cases} 2x - 6x > 8 \\ 4x - 2x < 1 - 3; \end{cases} \quad \begin{cases} -4x > 8 \\ 2x < -2; \end{cases} \quad \begin{cases} x < -\frac{8}{4} \\ x < -\frac{2}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} x < -2 \\ x < -1 \end{cases}$$

$$x \in (-\infty, -2) \cap (-\infty, -1) = (-\infty, -2).$$

Probleme propuse

8. Se consideră mulțimile: P_1 mulțimea paralelogramelor, P_2 mulțimea dreptunghiurilor, P_3 mulțimea romburilor, P_4 mulțimea pătratelor. Să se stabilească relațiile de incluziune dintre aceste mulțimi.

9. Se consideră aceleași mulțimi P_1, P_2, P_3, P_4 ca la problema precedentă. Să se determine: $P_1 \cup P_3$; $P_1 \cup P_4$; $P_2 \cup P_4$; $P_2 \cap P_4$; $P_1 \cap P_3$; $P_3 \cap P_4$.

10. Se consideră mulțimile: N mulțimea numerelor naturale și M mulțimea numerelor pare. Să se stabilească relația de incluziune și să se determine reuniunea și intersecția mulțimilor N și M.

11. Se consideră mulțimile: M_1 mulțimea numerelor pare, M_2 mulțimea numerelor impare. Să se determine reuniunea și intersecția mulțimilor M_1 și M_2.

12. Se dau mulțimile: $M_1=\{-15, -8, 0, 2, 4, 5\}$; $M_2=\left(-15, -\frac{1}{2}, 2\right)$; $M_3=\left(-11, -1{,}0, \frac{5}{2}\right)$ Să se determine: *a)* Reuniunea celor trei mulțimi date.

b) Intersecția mulțimilor M_1, M_2 și M_3, luate două cîte două.

13. Dacă $a>b$ ($a\neq 0$, $b\neq 0$) și $c=d\neq 0$, să se arate cînd avem $ac>bd$.

14. Dacă $a>b$ ($a>0$, $b>0$) și $m\in N$ (un număr natural), să se arate cînd au loc inegalitățile: $a^m>b^m$; $a^m<b^m$.

15. Cum trebuie luate numerele a și b pentru ca să avem: $ab>0$; $ab<0$.

16. În ce caz fracția $\frac{a}{b}$ se mărește dacă la numărătorul și numitorul ei adunăm același număr pozitiv ($a>0$, $b>0$).

17. Din inecuațiile de același sens să se arate inecuația care satisface pe celelalte în cazurile următoare:

a) $x>4$, $x>12$, $x>18$, $x>25$;
b) $x<6$, $x<17$, $x<20$, $x<30$;
c) $a>\frac{5}{6}$, $a>\frac{3}{4}$, $a>\frac{5}{12}$;
d) $y>0$, $y>-0{,}5$, $y>-5$;
e) $t>1$, $t>-1$, $t>-2$;
f) $z<0{,}001$, $z<0{,}01$, $z<0{,}31$.

18. Să se afle valorile lui x pentru care sînt pozitive expresiile următoare; a) $3x-15$; b) $12-4x$; c) $(x+1)2-3$; d) $5(x-1)-2(x-2)$.

19. Să se determine valorile lui x care fac negative expresiile: *a)* $x-4$; *b)* $2x-6$; c) $(x+3)2-x$; *d)* $4x-(x+1)3$.

Să se rezolve inecuațiile:

20.

a) $2x+3>13$
b) $2x+8<10$
c) $13x+4>5x+20$
d) $3(x+2)<2+5x$
c) $-3(x+10)>-20$
f) $16-3(2x-5)<3-16x$.

21.

a) $x-7<2x+5$
d) $10-\frac{5x}{2}>0$

b) $\frac{2x}{5}+4>x-\frac{4}{1}$

c) $9x-8+3(x-2)<2(x+3)$

e) $x+6b<16-3(x-2b)$

f) $\frac{x}{a}+\frac{x}{b}>\frac{a+b}{ab}$.

22.

a) $9x+8<15+7x$

b) $\frac{x-1}{3}-2(1-4x)>\frac{1}{4}x-\frac{7-52x}{6}$

c) $3-\frac{3x}{2}>\frac{5}{8}-\frac{4x-3}{6}$

d) $\frac{x}{2}+\frac{3x}{4}>15+\frac{5x}{6}$

e) $\frac{7x}{8}-5<\frac{9x}{10}-8$

f) $\frac{5x}{7}-\frac{13}{21}+\frac{x}{15}<\frac{9}{25}-\frac{2x}{35}$

g) $2x(2x-5)-27<(2x+1)^2$.

23. Să se rezolve inecuațiile simultane:

a) $\begin{cases} 2x>4x+6 \\ 4x+3<2x+1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x+7>7x-9 \\ x-3>-3x+1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5x-3>1+x \\ \frac{1}{2}-3x<\frac{2}{3}x-5 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 4x-7>2x+13 \\ 3x-18<2x+1 \end{cases}$

24. Să se determine mulțimea numerelor reale x care verifică perechile de inecuații:

a) $\begin{cases} 3x>9x+8 \\ 6x+3<2x+1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x+5\geqslant 6x-11 \\ 3-x<3x-1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 7x+6\geqslant 5x+12 \\ 3x-18<4x-20 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x-10<2x-11 \\ x+14\leqslant 15+2x \end{cases}$

e) $\begin{cases} 6x-7>5x-1 \\ 3x+6>8x-4 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 17x-11<2x+4 \\ 19x+31\leqslant x+85. \end{cases}$

25. Să se rezolve sistemele de inecuații:

a) $\begin{cases} 9+\frac{4x-11}{7}<\frac{x-3}{5} \\ (2+x)^2+8x^2<(3x-1)^2-12 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \frac{3x-1}{5}-\frac{13-x}{2}\geqslant\frac{7x}{3}-\frac{11(x+3)}{6} \\ \frac{2x+7}{35}<\frac{3x+5}{7}+8+\frac{10-3x}{5} \end{cases}$

b) $\begin{cases} 8(3x-2)-7x-5(12-3x)>13x \\ 20<\frac{2}{3}(7x-10)-\frac{1}{2}(50-x) \end{cases}$

d) $\begin{cases} \frac{2x^2+18x}{3x+27}<\frac{17x^3}{5x^2}+\frac{3x-5}{15} \\ \frac{(x+1)^2}{3x+3}+\frac{4x^2}{x}>\frac{10x+5}{2x+1} \end{cases}$

e) $\begin{cases} \frac{3x^2-3}{2x-2}-\frac{3x^2+6x+3}{2x+2}>\frac{12x^2-24x+12}{5(x-1)} \\ \frac{4-x}{8}<\frac{1-3x}{20}-\frac{x-4}{16} \end{cases}$

Capitolul VII

Funcții

1. *Să se reprezinte grafic în plan cu ajutorul axelor de coordonate punctele: A* (2, 5), *B* (—3, 4), *C* (—1, —5), *D* (4, —6).

Rezolvare: Pentru figurarea în plan a punctelor *A*, *B*, *C*, *D* se ia sistemul de coordonate rectangulare. Apoi cu ajutorul unității de măsură comună se reprezintă grafic punctele date (fig. 7a).

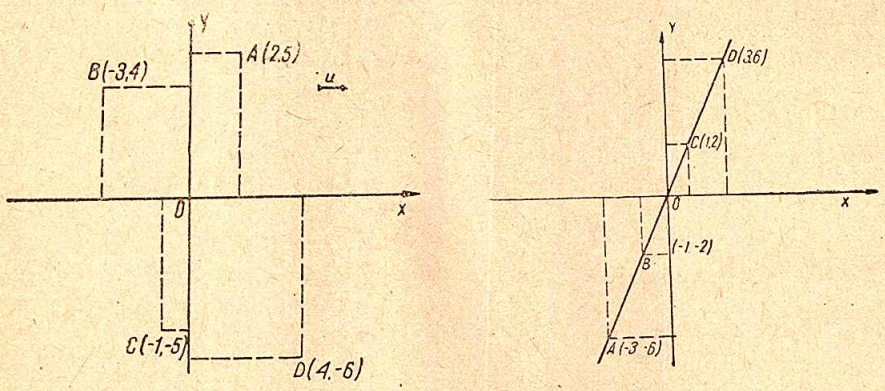


Fig. 7.

2. Să se reprezinte grafic funcția $f(x) = 2x$.

Rezolvare: Funcțiile de gradul I de forma $f(x) = ax$ au ca reprezentare grafică o linie dreaptă care trece prin origine. Se alcătuiește tabelul de valori și trasarea graficului cu ajutorul axelor de coordonate (fig. 7*b*).

x	$-\infty$	-3	-1	0	1	3	$+\infty$
$f(x) = 2x$	$-\infty$	-6	-2	0	2	6	$+\infty$

3. Să se reprezinte grafic funcția $f(x) = 2x + 3$.

Rezolvare: Funcțiile de gradul I de formă $f(x) = ax + b$ au ca reprezentare grafică o linie dreaptă care taie axele de coordonate în două puncte distincte. Se alcătuiește tabelul de valori, se reprezintă grafic punctele din tabel, se trasează graficul (fig. 8).

x	$-\infty$	-3	-1	0	1	3	$+\infty$
$f(x) = 2x + 3$	$-\infty$	-3	1	3	5	9	$+\infty$

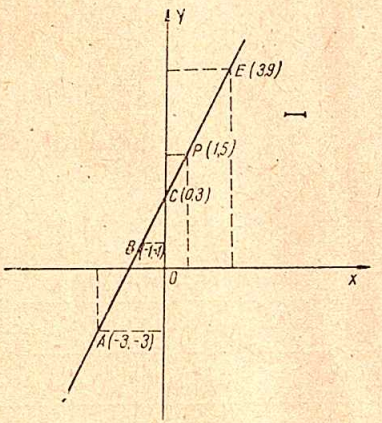


Fig. 8.

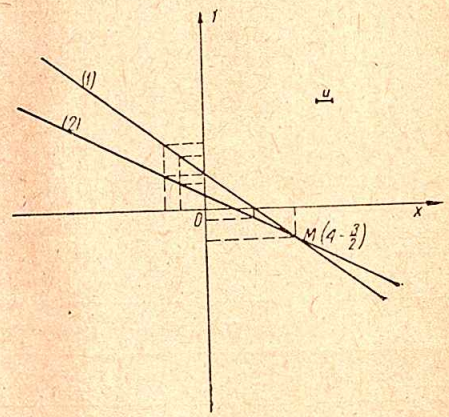


Fig. 9.

4. *Să se reozlve grafic sistemul:*

$$\begin{cases} 3x+4y=6 \\ x+2y=1. \end{cases}$$

Rezolvare: Ecuațiile sistemului se scriu ca funcții astfel:

1) $y=-\frac{3}{4}x+\frac{3}{2}$; 2) $y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$.

Se prezintă grafic fiecare funcție de gradul I (fig. 9):

$f_1(x)=-\frac{3}{4}x+\frac{3}{2}$; $f_2(x)=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$.

Alcătuim tabelul de valori comun:

x	$-\infty$	-2	$-\frac{3}{2}$	0	2	4	$+\infty$
$f_1(x)$	$+\infty$	3	$\frac{21}{8}$	$\frac{3}{2}$	0	$-\frac{3}{2}$	$+\infty$
$f_2(x)$	$+\infty$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$+\infty$

Din tabel se remarcă soluțiile sistemului $x=4$, $y=-\frac{3}{2}$ din penultima coloană.

5. *Cu aceleași axe de coordonate să se reprezinte grafic funcțiile* $f(x)=x^2$ *și* $f(x)=2x^2$.

Rezolvare: Funcțiile de gradul II $y=x^2$ și $y=2x^2$ au ca reprezentare grafică cîte o parabolă cu vîrful în origine (fig. 10). Funcția $y=2x^2$ are ramurile mai apropiate de axa Oy. Alcătuim tabelul de valori comun:

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$
$y=2x^2$	$+\infty$	8	2	0	2	8	$+\infty$
$y=x^2$	$+\infty$	4	1	0	1	4	$+\infty$

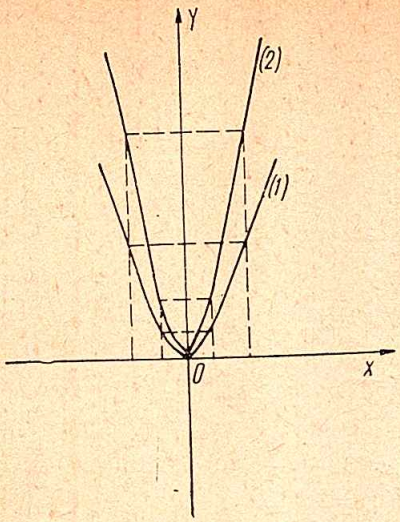


Fig. 10.

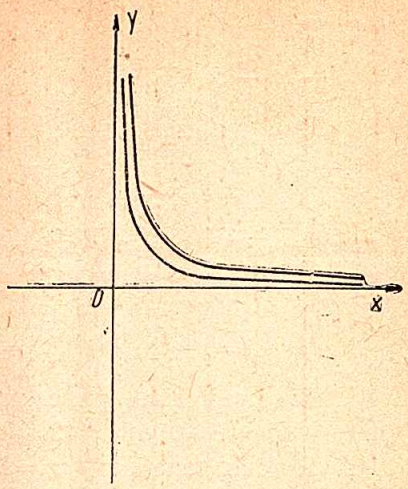


Fig. 11.

6. *Să se reprezinte grafic funcțiile:*

$$f(x)=\frac{1}{x} \text{ și } f(x)=\frac{2}{x}.$$

Rezolvare: Funcțiile $f(x)=\frac{1}{x}$ și $f(x)=\frac{2}{x}$ au ca reprezentare grafică o linie curbă numită hiperbolă (fig. 11). Considerăm tabelul de valori comun:

x	0	1	2	$+\infty$
$f(x)=\frac{1}{x}$	$+\infty$	1	$\frac{1}{2}$	0
$f(x)=\frac{2}{x}$	$+\infty$	2	1	0

7. Să se reprezinte grafic în plan punctele:

$M_1(-5, -8)$, $M_2\left(\frac{7}{2}, \frac{7}{4}\right)$. 8. $M_3(-2, 3)$, $M_4\left(\frac{1}{2}, -4\right)$.

9. Să se reprezinte grafic funcțiile:

$y=2$; $y=-2$; $x=-4$; $x=0$; $y=0$.

10. Să se reprezinte grafic funcțiile: $f(x)=x$, $f(x)=-x$.

Să se reprezinte grafic funcțiile:

11. a) $f(x)=4x$; b) $f(x)=5x$; c) $f(x)=\frac{3}{5}x$; d) $f(x)=\frac{2}{5}x$.

12. a) $f(x)=x+2$; b) $f(x)=-2x-1$; c) $f(x)=\frac{4}{5}x+1$.

13. Să se reprezinte grafic funcțiile:

a) $4x+5y+2=0$; *b)* $7x+2y+4=0$; *c)* $3x-y-6=0$; *d)* $3x+2y-5=0$.

14. Se dau funcțiile $f(x)=2x$; $f(x)=2x+3$.

Se cere:

a) Să se reprezinte grafic, dînd lui x valorile: -4, -3, -2, -1. 0, 1, 2, 3, 4.

b) Să se arate prin ce se deosebește poziția dreptelor obținute față, de axele de coordonate.

c) Să se arate că dreptele $y=2x$ și $y=2x+3$ sînt paralele între ele.

d) Să se afle lungimea segmentului cuprins între intersecția dreptei $y=2x+3$ cu axa y-lor și originea axelor de coordonate.

15. Se dau funcțiile: $f(x)=3x+2$, $f(x)=-3x+2$. Se cere:

a) Să se reprezinte grafic în aceleași axe de coordonate.

b) Să se arate că, atunci cînd x crește, funcția $f(x)=3x+2$ crește uniform, iar funcția $f(x)=-3x+2$ descrește uniform.

16. Se dau funcțiile:

$$f(x)=\frac{1}{2}x+4;\quad f(x)=\frac{1}{2}x-4;\quad f(x)=-\frac{1}{2}x+4;\quad f(x)=-\frac{1}{2}x-4$$

și se cere:

a) Să se reprezinte grafic pe aceleași axe de coordonate.

b) Să se calculeze valoarea lui x pentru care valoarea corespunzătoare a lui $f(x)$ este egală cu 3 și să se verifice rezultatul cu ajutorul graficului la fiecare funcție.

17. Să se construiască dreptele care reprezintă funcțiile:

a) $f(x)=x+1$; b) $f(x)=2x+3$; c) $f(x)=\frac{3}{5}x-\frac{3}{8}$; d) $f(x)=0{,}7x+2$

18. Să se reprezinte grafic pe aceleași axe de coordonate funcțiile:

a) $f(x)=\frac{1}{2}x+2$; b) $f(x)=-\frac{1}{2}x+3$, definite pe R.

19. Să se rezolve grafic ecuațiile:

a) $2x-6=0$; b) $3x+3=0$; c) $4x-2=10-5x$; d) $7-3x=10-5x$.

20. Să se construiască dreptele exprimate de ecuațiile:

a) $3y+x=0$; b) $x+y+5=0$; c) $4x+3y-18=0$.

21. Se dau funcțiile: $f(x)=3x-2$; $f(x)=2x+3$, definite pe R. Să se afle pentru ce valoare a lui x ambele funcții au aceeași valoare numerică. Să se rezolve grafic și prin calcul.

22. Să se verifice în mod grafic că cele 3 drepte exprimate de ecuațiile a) $2x+3y=13$, b) $5x-y=7$, c) $x-4y+10=0$ se intersectează într-un singur punct.

23. Să se rezolve grafic sistemele:

a) $\begin{cases} 12x-3y=12 \\ 8x+y=20 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 10x+4y=3 \\ 20y-5x=4. \end{cases}$

24. Să se discute, apoi să se rezolve grafic sistemele:

a) $\begin{cases} x-y=5 \\ x-2y=2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3x+y=9 \\ x+2y=-2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x-3y=-2 \\ 3x-9y=-6 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x=4-y \\ 2y=8-2x \end{cases}$

c) $\begin{cases} x-4=y \\ 2x-2y=5 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x+y=5 \\ 2y-5=-2x. \end{cases}$

25. Un automobil merge cu o mișcare uniform accelerată, accelerația fiind $a=0{,}8$ m/s^2. Se cere:

a) Să se completeze tabelul valorilor lui S în funcție de valorile lui t cuprinse în tabel.

Timpul în secunde	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$S=0{,}8\frac{t^2}{2}$											

b) Să se reprezinte grafic funcția $S(t)=\frac{2}{5}t^2$.

26. Să se dea exemple de mărimi a căror dependență se exprimă prin funcții de forma $f(x)=ax^2$.

27. Se dă funcția $f(x)=0{,}3x^2$. Să se calculeze valorile lui $f(x)$ pentru valorile lui x cuprinse în tabel:

x	-6	-3	-1	0	1	3	6
$f(x)$							

28. Să se reprezinte grafic funcția $f(x)=\frac{1}{3}x^2$.

29. Luînd aceleași axe de coordonate și aceeași unitate de măsură, să se reprezinte grafic funcțiile: a) $f(x)=0{,}25x^2$; b) $f(x)=0{,}5x^2$, definite pe mulțimea numerelor reale.

30. Aceeași problemă pentru funcțiile: $f(x)=x^2$ și $f(x)=0{,}2x^2$ pentru $x\in(-\infty, +\infty)$. Să se determine grafic coordonatele punctelor de intersecție, apoi să se verifice rezultatul obținut prin calcul.

31. Să se reprezinte grafic pe aceleași axe de coordonate și cu aceeași unitate de măsură funcțiile $f(x)=\frac{1}{3}x^2$ și $f(x)=3x^2$ și să se arate deosebirile dintre cele două grafice.

32. Să se construiască graficele funcțiilor: $f(x)=\frac{4}{x}$ și $f(x)=\frac{1}{3x}$.

33. Să se construiască graficul funcției $f(x)=\frac{2{,}1}{x}$, dînd lui x valorile: 5,4; 3,2; 1; 0,7; 0,5; 0,4 și aceleași valori negative. Unitatea de măsură este centimetrul.

34. Aria unui dreptunghi cu lungimea a centimetri și lățimea b centimetri este 12 cm^2. Se cere:

a) Să se reprezinte grafic $b=\frac{12}{a}$ pentru următoarele valori ale lui a: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12.

b) Folosind tabelul valorilor lui a și b, să se arate că pentru aria dată, lățimea dreptunghiului este invers proporțională cu lungimea lui.

35. Se dă funcţia $f(x)=\frac{6}{x}$.

a) Să se reprezinte grafic dînd lui x valorile următoare:
$-\infty$, -12, -6, -4, -2, -1, 1, 2, 4, 6, 12, $+\infty$.

b) Să se spună cum este aşezat graficul funcţiei în raport cu axele de coordonate.

c) Să se afle cu ajutorul graficului valorile lui y pentru x egal cu -5, -3, 3, 5.

36. Se dau funcţiile: $f(x)=\frac{8}{x}$; $f(x)=-\frac{8}{x}$.

a) Să se reprezinte grafic pe aceleaşi axe de coordonate funcţiile date

b) Să se spună cum este aşezat faţă de axele de coordonate graficul fiecărei funcţii date.

37. Se dă funcţia $f(x)=-4x^2$. Se cere:

a) Să se reprezinte grafic.

b) Să se explice influenţa semnului coeficientului lui x^2 asupra poziţiei graficului funcţiei faţă de axele de coordonate.

38. Să se reprezinte pe acelaşi desen graficele funcţiilor:

a) $f(x)=-7x^2$ şi $f(x)=-\frac{1}{7}x^2$,

b) $f(x)=3x^2$ şi $f(x)=\frac{1}{3}x^2$, folosind hîrtia milimetrică, şi să se explice din punct de vedere grafic rezultatele obţinute.

Capitolul VIII

Ecuaţii de gradul II

Să se rezolve ecuaţiile de gradul II:

1.

a) $8x^2-16x=0$;

b) $7x^2+21x=0$;

c) $x^2-3x=0$;

d) $6x^2+18x=0$;

e) $2x^2-72x=0$;

f) $\frac{4x^2-x}{2}-\frac{5x}{3}=0$.

2.

a) $5x^2-20=0$;
b) $8x^2-32=0$;
c) $2x^2-72=0$;
d) $5x^2-10=0$;
e) $x^2-18=0$;
f) $2x^2+24=0$;
g) $2x^2+50=0$;
h) $9x^2-2=0$;
i) $16x^2=9$;
j) $48=5x^2$.

3.

a) $3x^2-5x+1=(2x-1)^2$;
b) $(9x-2)(x+1)=2(x^2-1)$;
c) $(12x-3)(x+1)=(3x+1)(3x-1)+9x$;
d) $(2x+1)^3=(2x-1)^3$;
e) $10x^3+1=2x^2(5x-3)-(2x-1)$;
f) $\frac{3x+2}{2}=\frac{2x-1}{x-1}$;
g) $\frac{5x^2+3x+1}{x+3}=\frac{x+1}{3}$;
h) $\frac{x}{2}+\frac{x+1}{3}=\frac{3x^2}{4}+\frac{10x}{12}$;
i) $(5x^2-2)(5x^2+2)-(5x^2+1)^2=0$.

4.

a) $x^2-256=0$;
b) $x^2-\frac{25}{81}=0$;
c) $x^2=2\frac{7}{9}$;
d) $\frac{5}{9}x^2-3\,380=0$;
e) $0{,}09x^2=0{,}6084$;
f) $4x^2+6x=9x^2-15x$;
g) $12x^2-5x=9x^2+7x$;
h) $x(x-15)=3(108-5x)$;
i) $10(x-2)+19=(5x-1)(1+5x)$;

5.

a) $\frac{8x^2-3}{5}+\frac{9x^2-5}{4}=2$;
b) $\frac{x}{x+4}+\frac{x}{x-4}=5\frac{5}{9}$;
c) $\frac{x+3}{x+2}+\frac{x-3}{x-2}=\frac{2x-3}{x-1}$;
d) $\frac{x+1}{x+2}+\frac{x-1}{x-2}=\frac{2x+1}{x+1}$.

6.

a) $ax^2+2bx=0$;
b) $(a^2-b^2)x^2=(a+b)x$;

c) $a^3b^3x^2-ab=0$;

d) $(a+b)x^2-(a+b)^3=0$;

e) $2(x+a)(x-a)+4(x+b)(x-b)=2a^2-8ab$;

f) $(ax+b)^2-(a-bx)^2-4abx+a^2(x^2-1)=0$;

g) $\frac{x+a}{x-a}+\frac{x-a}{x+a}=\frac{a(3x+2a)}{x^2-a^2}$;

h) $b^2y^2+ay=a^2y^2+by$;

i) $\frac{y+b}{y-b}+\frac{y-b}{y+b}=\frac{b(3y+2b)}{y^2-b^2}$.

7.

a) $x^2-2x-3=0$;

b) $x^2-7x+10=0$;

c) $x^2+7x+12=0$;

d) $x^2-8x+12=0$;

e) $x^2+6x+9=0$;

f) $x^2-10x+25=0$;

g) $x^2+2x-48=0$;

h) $x^2-3x-28=0$;

i) $x^2+2x+1=0$;

j) $x^2-8x-9=0$;

k) $2x^2-3x+1=0$;

l) $5x^2-17x+6=0$.

8.

a) $6x^2-7x+2=0$;

b) $5x^2+13x-6=0$;

c) $4x^2-17x-15=0$;

d) $4x^2+4x+1=0$;

e) $18x^2+3x-10=0$;

f) $14x^2-3x-3=0$;

g) $x^2-(5+\sqrt{2})x+4+4\sqrt{2}=0$;

h) $x^2-2\sqrt{2}x+2=0$;

9.

a) $x^2-1=4x$;

b) $9x^2+49=42x$;

c) $8x^2=-14x-3$;

d) $12x^2-5x=2$;

e) $x^2+0{,}21=x$;

f) $25x(x+1)=-4$.

10.

a) $(2x-3)^2=8x$; b) $\frac{9}{x}-\frac{x}{3}=2$; c) $x+\frac{1}{x-3}=5$;

d) $\frac{x}{7}+\frac{21}{x+5}=\frac{47}{7}$; e) $\frac{x}{x+1}+\frac{x}{x+4}=1$.

11.

a) $(x-3)^2+(x+4)^2-(x-5)^2=17x+24$;

b) $\frac{2x-5}{x-1}=\frac{5x-3}{3x+5}$;

c) $\frac{7}{x}-\frac{21+65x}{7}+8x+11=0$;

d) $\frac{(x+3)^2}{5}+2-\frac{(3x-1)^2}{5}=x(2x-3)$;

e) $\frac{x(1-x)}{1+x}=6$;

f) $\frac{x+0.5x}{9x+3}=\frac{x+2}{3x-1}-\frac{8x^2+3}{9x^2-1}$.

12.

a) $x^2-3ax+2a^2=0$;
b) $x^2-8ax+15a^2=0$;
c) $x^2-bx-6b^2=0$;
d) $6x^2-7ax+2a^2=0$;
e) $15x^2-ax-2a^2=0$;
f) $x^2-2ax+a^2-b^2=0$;
g) $x^2-(5+ab)x+6+3ab=0$;
h) $6x^2-(10a+b)x+4a^2-b^2=0$;
i) $a^2x^2-2a^3x+a^4-1=0$;
j) $(a^2-b^2)x^2-2a^2bx+a^2b^2=0$;
k) $x^2-2(a^2+b^2)x+(a^2-b^2)^2=0$.

13. Fără a rezolva ecuațiile următoare, să se arate care din ele au două rădăcini reale distincte, două rădăcini egale, sau nu au rădăcini reale:

a) $x^2-4x+4=0$;
b) $x^2-4x+3=0$;
c) $x^2+7x+15=0$;
d) $x^2-2x+5=0$;
e) $x^2-10x+25=0$;
f) $x^2+16x+48=0$;
g) $x^2-14x+49=0$;
h) $x^2+x-1=0$;
i) $x^2-4x-8=0$;
j) $4x^2+6x+9=0$;
k) $7x^2-x-1=0$;
l) $2x^2-3x+1=0$;
m) $12x-4=x^2$;
n) $4x^2+5=10x$;
o) $4x^2+9x=-2$;
p) $2x^2+3x=2$.

14. Se dau ecuațiile: $x^2-4x+k=0$; $2x^2-6x+m+7=0$; Să se afle pentru ce valori ale lui k, respectiv m, ecuațiile au două rădăcini distincte.

15. Pentru ce valori ale lui a următoarele ecuații au două rădăcini reale și egale.

a) $x^2+ax+9=0$;
b) $x^2+12x+a=0$;
c) $ax^2+4x+1=0$;
d) $9x^2+6x+a=0$;
e) $4x^2+ax+9=0$;
f) $x^2+2(a-4)x+a^2+6a+3=0$;
g) $(2+a)x^2+6ax+4a+1=0$;
h) $(a-1)x^2+2(a+1)x+a-2=0$.

16. Să se afle pentru ce valori ale lui k ecuația:

a) $x^2+kx+15=0$ are o rădăcină egală cu 5;

b) $x^2+kx-24=0$ are o rădăcină egală cu -3;

c) $kx^2-15x-7=0$ are o rădăcină egală cu 7;

d) $kx^2+12x-3=0$ are o rădăcină egală cu $\frac{1}{5}$;

e) $x^2-2ax+k=0$ are o rădăcină egală cu $a-b$;

f) $x^2+kx+a^2-b^2=0$ are o rădăcină egală cu $a+b$.

17. *Grădina unei cooperative agricole de producție are lungimea cu* 10 dam *mai mare decît lățimea. Să se afle lungimea gardului grădinii, știind că aria terenului său este* 1 200 dam^2.

Rezolvare: Alegem ca necunoscută lungimea grădinii, pe care o notăm cu x. Ecuația problemei este: $x(x-10)=1\,200$.

18. *Înălțimea unui dreptunghi reprezintă* 75% *din baza lui. Să se afle perimetrul acestui dreptunghi știind că aria este* 48 m^2.

Rezolvare: Fie x baza dreptunghiului. Ecuația problemei este: $x \cdot \frac{8x}{4} = 48$. Aflăm baza dreptunghiului egală cu 8 m, înălțimea 6 m și perimetrul 28 m.

19. *O cooperativă agricolă de producție a prevăzut să însămînțeze* 200 ha *pînă la un anumit termen. Însămînțînd zilnic cu* 5 ha *mai mult decît a prevăzut a terminat însămînțarea cu două zile înainte de termen. Să se afle în cîte zile s-a terminat însămînțarea.*

Rezolvare: Fie x numărul hectarelor prevăzute a se însămînța zilnic și $\frac{200}{x}$ numărul zilelor prevăzute pentru însămînțarea suprafeței. Ecuația $\frac{200}{x}-\frac{200}{x+5}=2$ are soluția $x_1=20$, $x_2=-25$. Avem rezultatele: 20 ha prevăzute a se însămînța zilnic; în 8 zile s-a terminat însămînțarea.

20. *Un bazin are două robinete. Prin robinetul al doilea bazinul poate fi umplut cu* 3 ore *mai repede decît prin primul robinet. Apa a curs* $5\frac{3}{4}$ ore *prin primul robinet, apoi s-a dat drumul apei prin robinetul al doilea și*

astfel după 10 ore *de la deschiderea robinetului al doilea bazinul s-a umplut. Să se afle în cîte ore umple bazinul fiecare robinet dacă curge singur.*

Rezolvare: Notăm cu: x numărul orelor în care primul robinet umple singur bazinul; $x-3$ numărul orelor în care al doilea robinet umple singur bazinul; $\frac{1}{x}$ partea din bazin umplută într-o oră de primul robinet; $\frac{1}{x-3}$ partea din bazin umplută într-o oră de al doilea robinet. Avem ecuația: $\frac{23}{4x}+10\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x-3}\right)=1$. Primul robinet umple singur bazinul în 27 de ore, iar al doilea în 24 de ore.

21. *Tatăl a doi copii are* 34 de ani *unul din copii are* 6 ani, *iar celălalt* 10 ani. *Se întreabă peste cîți ani produsul vîrstelor celor doi copii va fi egal cu vîrsta la care ajunge atunci tatăl lor.*

Rezolvare: Notăm cu x numărul anilor care vor trece de acum înainte. Avem ecuația: $(6+x)(10+x)=34+x$, cu soluția $x_1=-2$, $x_2=-13$. Valoarea $x=-13$ nu este bună, deoarece acum 13 ani copiii nu erau născuți, iar valoarea $x=-2$ arată că acum 2 ani produsul vîrstelor copiilor a fost egal cu vîrsta la care va ajunge tatăl lor.

22. *Un triunghi dreptunghic are ipotenuza de* 25 m, *iar suma dintre o catetă și proiecția ei pe ipotenuză este* 24 m. *Să se afle catetele.*

Rezolvare: Alegem ca necunoscută o catetă pe care o notăm cu x. Ecuația este: $x^2=(24-x)\cdot 25$, cu soluția $x_1=15$, $x_2=-40$. Aflăm catetele egale cu 15 m, și 20 m.

Probleme propuse

23. Produsul a două numere este egal cu 240. Unul dintre numere este cu 8 mai mare decît celălalt. Să se afle cele două numere.

24. Să se găsească două numere consecutive, astfel ca produsul lor să fie 132.

25. Să se împartă numărul 12 în două părți, astfel ca produsul lor să fie 35.

26. Să se împartă numărul 12 în două părți, astfel ca pătratul uneia din ele adunat cu triplul pătratului celeilalte să dea numărul 112.

27. Să se afle cinci numere consecutive, astfel ca suma pătratelor celor două numere mai mari să fie egală cu suma pătratelor celorlalte trei.

28. Doi muncitori termină o lucrare în două zile. În cîte zile va termina lucrarea fiecare dintre ei lucrînd singur, dacă primului i-ar trebui cu trei zile mai mult decît celui de-al doilea.

29. Pentru o lucrare au fost angajați doi muncitori cu salarii diferite. Primul a primit 180 de lei, iar al doilea, care a lucrat cu trei zile mai mult, a primit 216 lei. Dacă primul ar fi lucrat cu două zile mai mult, iar al doilea numai cu o zi mai mult, ar fi primit sume egale. Să se afle cîte zile a lucrat fiecare muncitor și cît a primit fiecare pe zi.

30. Un elev a parcurs de acasă pînă la școală un drum de 1,5 km. La înapoiere, mergînd cu 1 km pe oră mai încet decît la ducere, îi trebuie cu $\frac{1}{8}$ ore mai mult. Să se afle ce viteză a avut elevul la ducere și la înapoiere.

31. Să se afle două numere a căror sumă să fie 10, iar suma cuburilor lor să fie 520.

32. Suma catetelor unui triunghi dreptunghi este 14 m, iar aria 24 m^2. Să se afle laturile triunghiului.

33. Un romb are perimetrul de 52 m, iar suma diagonalelor lui este 34 m. Să se afle diagonalele.

34. Într-un poligon convex, numărul diagonalelor este de opt or mai mare ca numărul laturilor. Să se afle cîte laturi are poligonul.

35. Două automobile pornesc dintr-un oraș spre alt oraș. Viteza primului automobil este cu 10 km pe oră mai mare decît viteza celui de-al doilea și astfel primul automobil sosește la destinație cu o oră mai devreme decît al doilea. Să se determine vitezele automobilelor, știind că distanța între orașe este de 560 km.

Probleme din geometria plană şi în spaţiu

Capitolul IX

Introducere în geometria plană

1. Se găsesc punctele A, B, C pe aceeaşi dreaptă, dacă distanţele dintre ele sînt următoarele:

a) $AB=20$ cm; $AC=1{,}3$ cm; $BC=3$ cm.

b) $AB=4$ cm; $AC=7$ cm; $BC=3$ cm;

c) $AB=1{,}8$ cm; $AC=13$ cm; $BC=7$ cm.

2. Se dau 3 puncte, 4 puncte, 5 puncte, 20 de puncte, n puncte. Se cere:

a) Dacă se dau 3 puncte necoliniare, să se arate cîte linii drepte diferite se pot duce prin aceste puncte unindu-le două cîte două.

b) Prin cîte linii drepte se pot uni, două cîte două, 4 puncte, dintre care 3 nu sînt coliniare.

c) Aceeaşi întrebare ca la punctul *b)* în cazul a 5 puncte, 20 de puncte, n puncte.

3. Pe o semidreaptă cu originea în O se iau punctele A, B, C şi M, N, P mijloacele segmentelor BC, CA şi AB. Să se arate că: $OA+OB+OC=OM+ON+OP$.

4. Figura 12 reprezintă o parte a unui strung. Să se măsoare cu ajutorul scării date segmentele indicate pe figură prin săgeți și să se noteze în caiet rezultatele.

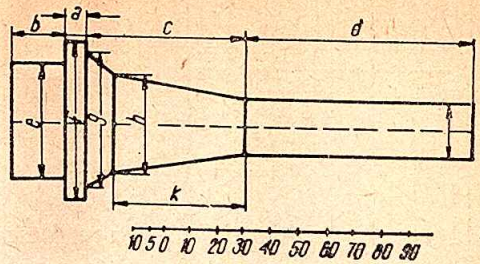


Fig. 12.

5. Trei grinzi de lemn se așază cap la cap; prima grindă are o lungime de 4,8 m, a doua de 3,4 m, iar a treia de 5,8 m. Să se afle lungimea lor totală prin calcul și prin construcție, reprezentînd unmetru printr-un segment de un centimetru.

6. Un brad are lungimea de 20,25 m. Din partea de jos s-a tăiat o parte de 3,75 m și o bîrnă de 7,40 m lungime. Ce lungime are partea rămasă?

7. Pe un segment AB, lung de 20 cm, se ia o parte $AC=5{,}1$ cm și o parte $BD=7{,}9$ cm. Se cere:

a) Să se afle lungimea segmentului CD prin calcul și grafic.

b) Să se rezolve problema, schimbînd datele astfel: $AB=4{,}8$ cm, $AC=2{,}8$ cm, $BD=3$ cm.

8. Se dau segmentele $AB=3$ cm, $CD=4$ cm, $EF=6$ cm. Să se construiască segmentul egal cu suma lor.

9. Se dau segmentele de dreaptă $AB=5$ cm, $CD=8$ cm, $EF=6$ cm. Să se determine grafic suma lor.

10. Să se construiască segmentul egal cu diferența segmentelor $OB=6$ cm, $OD=2{,}5$ cm.

11. O șosea este asfaltată pe lungimea de 8 km. Pentru satisfacerea noilor cerințe de transport, șoseaua va fi asfaltată pe o lungime de 3 ori mai mare. Să se determine grafic la scara $\frac{1}{10\,000}$ lungimea șoselei asfaltate.

12. Să se construiască segmentul egal cu $\frac{1}{4}$ din segmentul $AB=10$ cm.

13. Să se construiască un segment egal cu: $3a+2b$ și $4a-3b$, unde a și b sînt lungimile a două segmente date ($a>b$).

14. Dintr-un punct M al unei drepte se iau pe dreaptă în același sens două segmente: $MN=100$ cm și $MP=160$ cm. Să se afle distanța dintre mijloacele acestor segmente prin calcul și grafic la scara $\frac{1}{10}$.

Fig. 13.

15. Un segment AB este împărțit în două părți neegale. Distanța dintre mijloacele părților este de 2,75 cm. Să se afle lungimea segmentului AB și să se reprezinte grafic.

16. Să se explice cu ajutorul desenului din figura 13 cum se determină prin construcție două segmente, cînd se dă suma lor S și diferența lor d, apoi numeric cînd: $S=7$ cm, $d=1{,}5$ cm.

17. Să se găsească poziția punctului M, care împarte segmentul AB în raportul $\frac{AM}{MB}=\frac{2}{3}$.

18. Un segment AB este egal cu 2,8 cm. Să se afle distanța dintre mijlocul acestui segment și punctul care împarte segmentul în raportul dat, efectuînd: $\frac{2}{3}:\frac{4}{15}$.

19. Un segment AB este prelungit cu o lungime BC, astfel încît AC să fie de m ori mai mare decît AB ($m=5$). Să se afle raportul $\frac{AB}{BC}$.

20. Pe o dreaptă MN se iau la dreapta și la stînga punctului O segmentele $OA=OB=2$ cm și $OC=OD=6$ cm. Să se arate că $AC=BD$ și că $AD=BC$.

21. Un segment AB este împărțit în trei părți proporționale cu numerele 2, 3, 4. Depărtarea dintre mijloacele părților de la capete este de 5,4 cm. Să se afle lungimea segmentului AB.

22. Pe un segment de dreaptă AB se iau două puncte M și N, care împart segmentul AB în rapoartele: $\frac{AM}{MB}=\frac{2}{3}$ și $\frac{AN}{NB}=\frac{3}{2}$. Să se reprezinte grafic și să se spună la ce depărtare de extremitățile A, B ale segmentului dat se află punctele M și N.

23. Un segment AB este împărțit de punctul C în raportul $\frac{5}{7}$, iar de punctul D în raportul $\frac{5}{11}$, distanța dintre C și D fiind de 10 cm. Să se determine lungimea segmentului AB.

24. Se dă figura 14. Să se spună cum se numesc segmentele de dreaptă AB, OE, CD, porțiunea de linie curbă CSD și ce poziții au față de cerc dreptele MN și PR.

25. Se dau un cerc și un punct interior M. Să se ducă o coardă care să aibă mijlocul în punctul M.

26. Două cercuri concentrice au razele de 39 mm și 65 mm. Să se afle lungimea coardei cercului mare care este tangentă la cercul mic.

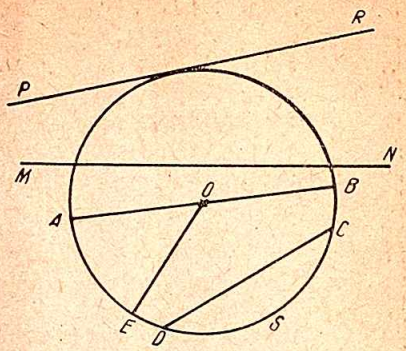


Fig. 14.

27. Dacă se dă un segment de dreaptă egal cu o latură a triunghiului echilateral, cu ce unghi trebuie să rotim segmentul pentru a construi triunghiul.

28. Într-un cerc de rază R, pe circumferința sa se iau arcele $\overset{\frown}{AB}=m$, $\overset{\frown}{CD}=n$ $(m>n)$.

a) Să se efectueze operațiile: $m+n$; $m-n$; $m=3\ n$.

b) Să se efectueze operațiile: $m:8$; $n:4$, cînd $m=2n$ și să se explice rezultatul.

Capitolul X

Unghiuri

1. *Să se calculeze unghiul format de bisectoarea unghiului de* 37°13′28″ *cu bisectoarea unghiului adiacent de* 142°46′32″.

Rezolvare: Cele două unghiuri adiacente după sumă fiind suplementare, unghiul format de bisectoarele lor va fi egal cu 90° (fig. 15).

$$\widehat{FOE} = \frac{1}{2}(\widehat{AOB} + \widehat{BOC})$$

$$\widehat{FOE} = \frac{1}{2}(37°13'28'' + 142°46'32'')$$

$$\widehat{FOE} = \frac{1}{2} \cdot 180°$$

$$\widehat{FOE} = 90°.$$

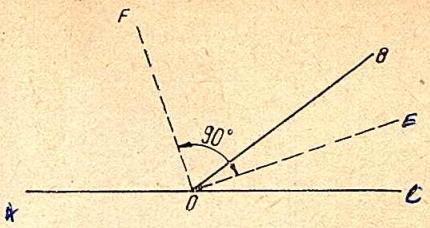
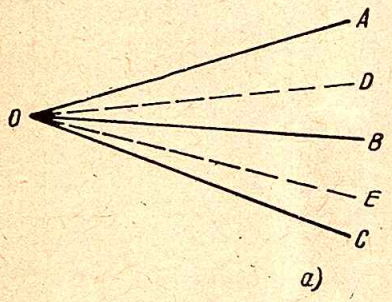


Fig. 15.

2. *Să se calculeze unghiul format de bisectoarele a două unghiuri adiacente oarecare. Ce se întîmplă cînd cele două unghiuri sînt adiacente suplementare* (fig. 16, *a*, *b*).

Rezolvare:



a)

a) $\widehat{AOD} = \widehat{DOB} = \frac{\widehat{AOB}}{2}$

$$\widehat{BOE} = \widehat{EOC} = \frac{\widehat{BOC}}{2}$$

$$\widehat{DOE} = \widehat{DOB} + \widehat{BOE}$$

$$\widehat{DOE} = \frac{\widehat{AOB}}{2} + \frac{\widehat{BOC}}{2}$$

$$\widehat{DOE} = \frac{\widehat{AOB} + \widehat{BOC}}{2};$$

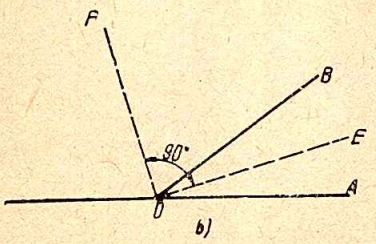
b) $\widehat{FOE} = \widehat{FOB} + \widehat{BOE}$

$$\widehat{FOE} = \frac{\widehat{BOC}}{2} + \frac{\widehat{AOB}}{2}$$

$$\widehat{FOE} = \frac{1}{2}(\widehat{BOC} + \widehat{AOB})$$

$$\widehat{FOE} = \frac{1}{2} \cdot 180°$$

$$\widehat{FOE} = 90°.$$



b)

Fig. 16.

Unghiul format de bisectoarele a două unghiuri adiacente oarecare este egal cu semisuma unghiurilor. Cînd unghiurile sînt suplementare, unghiul format de bisectoare este un unghi drept.

3. *Unghiurile* $\widehat{AOB}$ *și* $\widehat{COD}$ *au aceeași bisectoare, unghiul* $\widehat{COD}$ *fiind așezat în interiorul lui* $\widehat{AOB}$ *(fig. 17). Să se demonstreze că :*

$\widehat{AOC}=\widehat{BOD}$ *și* $\widehat{AOD}=\widehat{COB}$.

Rezolvare :

$\widehat{AOM}=\widehat{MOB}$ $\qquad$ $\widehat{AOC}=\widehat{DOB}$

$\widehat{COM}=\widehat{MOD}$ $\qquad$ $\widehat{AOD}=\widehat{AOC}+\widehat{COD}$

$\widehat{AOC}=\widehat{AOM}-\widehat{COM}$ $\qquad$ $\widehat{COB}=\widehat{DOB}+\widehat{COD}$

$\widehat{DOB}=\widehat{MOB}-\widehat{MOD}$ $\qquad$ $\widehat{AOD}=\widehat{COB}$

4. *Se dă un unghi* $\widehat{ACB}$ *și o dreaptă oarecare* CM *dusă în afara acestui unghi (fig. 18). Se cere să se calculeze unghiul format de dreapta oarecare* CM *cu bisectoarea unghiului* $\widehat{ACB}$.

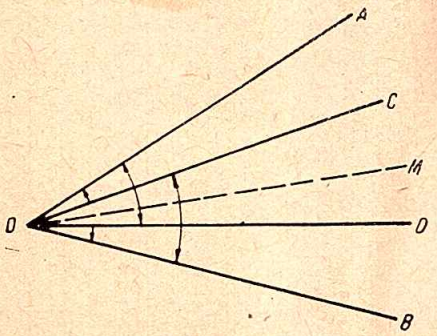


Fig. 17.

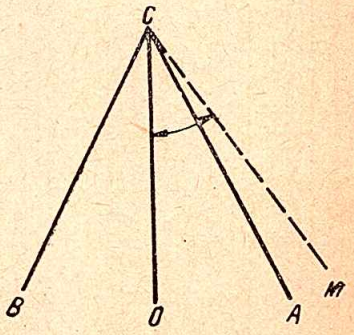


Fig. 18.

Rezolvare: Se calculează suma unghiurilor formate de dreapta oarecare CM cu fiecare latură a unghiului ACB și se ține seamă de proprietatea bisectoarei unui unghi.

$$\widehat{MCA}+\widehat{MCB}=\widehat{BCA}+\widehat{MCA}+\widehat{MCA}=$$

$$=2\widehat{BCO}+2\widehat{MCA}=2(\widehat{BCO}+\widehat{MCA})=2\widehat{MCO}$$

$$\widehat{MCA}+\widehat{MCB}=2\widehat{MCO}$$

$$\widehat{MCO}=\frac{\widehat{MCA}+\widehat{MCB}}{2}.$$

5. *Două unghiuri egale* $\widehat{AOB}$ *și* $\widehat{COD}$ *au același vîrf și o parte comună* $\widehat{COB}$ *(fig. 19).*

a) *Să se arate că* $\widehat{AOC}=\widehat{BOD}$.

b) *Să se arate că bisectoarea unghiului* $\widehat{BOC}$ *este și bisectoarea unghiului* $\widehat{AOD}$.

Rezolvare:

a) $\widehat{AOC}=\widehat{AOB}-\widehat{COB}$

$\widehat{BOD}=\widehat{COD}-\widehat{COB}$

$\widehat{AOB}=\widehat{COD}$ Deci: $\widehat{AOC}=\widehat{BOD}$.

b) $\widehat{COE}=\widehat{EOB}$

$\widehat{AOE}=\widehat{EOD}$

numai cînd OE este bisectoare pentru unghiurile $\widehat{COB}$ și $\widehat{AOD}$.

Deci: $\widehat{AOC}=\widehat{BOD}$.

6. *Fiind dat un unghi* $\widehat{AOB}$, *se duce* OA' *perpendiculară pe* OA *și de aceeași parte ca și* OB *; se duce apoi* OB' *perpendiculară pe* OB *și de aceeași parte ca și* OA *(fig. 20). Să se arate că:*

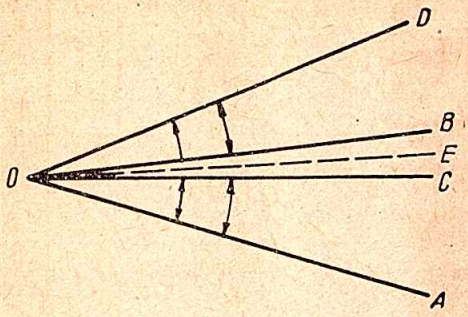


Fig. 19.

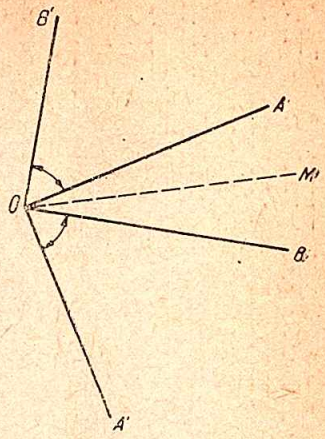


Fig. 20.

a) *Unghiurile* $\widehat{AOB}$, $\widehat{A'OB'}$ *au aceeași bisectoare.*

b) *Că aceste unghiuri sînt suplementare.*

Rezolvare :

a) $\widehat{BOB'} = \widehat{AOA'}$ $(=90°)$

$\widehat{MOB} = \widehat{MOA}$.

Scădem aceste egalități membru cu membru și obținem :

$\widehat{BOB'} - \widehat{MOB} = \widehat{AOA'} - \widehat{MOA}$

$\widehat{B'OM} = \widehat{A'OM}$.

Acest rezultat ne arată că OM este bisectoare atît pentru unghiul $\widehat{AOB}$ cît și pentru $\widehat{A'OB'}$.

b) $\widehat{BOB'} + \widehat{AOA'} = 180°$

$\widehat{AOA'} = \widehat{BOA'} + \widehat{AOB}$

$\widehat{B'OA'} + \widehat{AOB} = 180°$

$\widehat{BOB'} = \widehat{AOB'} + \widehat{AOB}$

$\widehat{AOB'} + 2\widehat{AOB} + \widehat{BOA'} = 180°$.

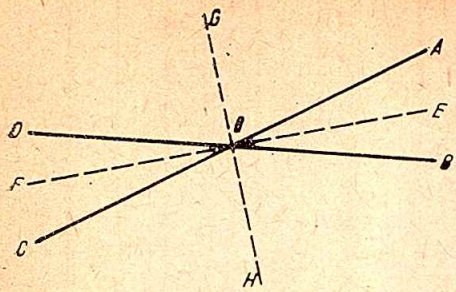


Fig. 21.

7. *Dacă semidreptele consecutive* OA, OB, OC, OD *sînt duse în așa fel încît bisectoarele unghiurilor* $\widehat{AOB}$, $\widehat{COD}$ *să fie în prelungire, de asemenea bisectoarele unghiurilor* $\widehat{BOC}$, $\widehat{AOD}$ *să fie în prelungire, atunci cele patru semidrepte, considerate două cîte două sînt în prelungire (fig. 21).*

Rezolvare:

$\widehat{EOH}+\widehat{HOF}=180°$

$\widehat{FOH}=\widehat{COH}+\widehat{FOC}$

$\widehat{FOH}=\frac{\widehat{COB}}{2}+\frac{\widehat{COD}}{2}$

$\widehat{EOH}=\widehat{BOE}+\widehat{BOH}$

$\widehat{EOH}=\frac{\widehat{AOB}}{2}+\frac{\widehat{COB}}{2}$

$\frac{\widehat{AOB}}{2}+\frac{\widehat{COD}}{2}+\widehat{COB}=180°$

$\widehat{AOB}+\widehat{COB}=180°.$

Rezultă că *OA* și *OC* sînt în prelungire. Unghiurile $\widehat{AOB}$ și $\widehat{COD}$ avînd bisectoarele *OE* și *OF* în prelungire sînt egale. Din același motiv și unghiurile $\widehat{AOD}$ și $\widehat{COB}$ sînt egale.

Probleme propuse

8. Să se construiască cu raportorul, apoi să se adune următoarele unghiuri:

a) $\widehat{ABC}=70°$; $\widehat{DEF}=40°$; $\widehat{IGH}=60°$.

b) $\widehat{ADB}=95°$; $\widehat{CDE}=48°$; $\widehat{FGH}=137°$.

9. Se dau următoarele perechi de unghiuri adiacente:

a) $\widehat{A}=75°17'25''$ și $\widehat{B}=104°44'35''$.

b) $\widehat{A}=134°20'$ și $\widehat{B}=45°40'$.

c) $\widehat{A}=15°53'29''$ și $\widehat{B}=163°34'18''$.

Să se stabilească prin calcul dacă laturile necomune sînt în prelungire sau nu. În cazul cînd nu sînt în prelungire, să se arate cu cît trebuie mărit sau micșorat unul dintre unghiurile date pentru ca laturile necomune să fie în prelungire.

10. Printr-un punct O se duc semidreptele OA, OB, OC, OD, OE, care formează următoarele unghiuri adiacente: $\widehat{AOB}=50°$, $\widehat{BOC}=80°$, $\widehat{COD}=30°$, $\widehat{DOE}=95°$. Să se calculeze mărimea unghiului $\widehat{EOA}$.

11. Să se construiască cu raportorul următoarele unghiuri adiacente: $\widehat{AOB}=28°$ și $\widehat{BOC}=56°$, apoi să se stabilească prin calcul mărimea unghiului $\widehat{AOC}$.

12. Să se efectueze operațiile următoare:

a) $27°47'43''+3°52'27''$
b) $6°27'35''+40°32'50''$
c) $26°34'18''+18°25'42''$
d) $74°3'-10°45'$
e) $65°24'-16°34'50''$
f) $85°-34°28'$
g) $6°41'38''\cdot 4$
h) $13°41'29''\cdot 3$
i) $54°28':2$
j) $96°16':3$.

13. Se dau unghiurile $\widehat{A}=44°26'13''$, $\widehat{B}=16°41'17''$, $\widehat{C}=21°43'57''$ Să se calculeze:

a) $\widehat{A}+\widehat{B}-\widehat{C}$;
b) $\widehat{A}-\widehat{B}+\widehat{C}$;
c) $\widehat{A}+2\widehat{B}-3\widehat{C}$,
d) $2\widehat{A}-3\widehat{B}+2\widehat{C}$;
e) $3\widehat{A}-4\widehat{B}-2\widehat{C}$;
f) $5\widehat{A}-2\widehat{B}+\widehat{C}:3$.

14. Să se calculeze suma și diferența perechilor de unghiuri:

a) $\widehat{A}=45°$ și $\widehat{B}=27°18'$
b) $\widehat{C}=121°15'$ și $\widehat{D}=59°37'14''$
c) $\widehat{E}=54°31'57''$ și $\widehat{F}=37°43'28''$.

15. Un unghi are 63°49′. Să se calculeze unghiul care se obține prelungind una din laturile sale dincolo de vîrf.

16. Să se construiască unghiul complementar unghiului 37°.

17. Să se găsească complementul unghiurilor următoare: 34°15′, 65°7′15″, 39°17″.

18. Să se construiască unghiul suplementar unghiului de 58°.

19. Să se arate care dintre grupurile de unghiuri sînt complementare:

a) 37° și 53°
b) 81° și 14°
c) 29° și 61°
d) 38° și 42°
e) 55° și 35°
f) 39° și 61°
g) 42° și 48°
h) 5° și 85°.

20. Să se găsească suplementul următoarelor unghiuri:

a) 120°15′17″; b) 148°7′13″; c) 24°15″.

21. Să se arate care din grupele următoare de unghiuri sînt suplementare:

a) 93° și 87°
b) 145° și 35°
c) 71° și 49°
d) 87° și 53°
e) 109° și 71°
f) 43° și 127°
g) 59° și 121°
h) 101° și 95°.

22. Să se calculeze complementul și suplementul unghiurilor:

a) $\widehat{A}=41°35'39''$ și b) $\widehat{B}=62°47'51''$.

23. Să notăm cu b_1, b_2, b_3 bisectoarele respective a 3 unghiuri adiacente consecutive suplementare. Dacă $\widehat{A}_1$, $\widehat{A}_2$, $\widehat{A}_3$ reprezintă mărimile acestor unghiuri, atunci să se exprime mărimile unghiurilor formate de: *a)* bisectoarele b_1 și b_2; *b)* bisectoarele b_1 și b_3; *c)* bisectoarele b_2 și b_3.

24. Se dau dreptele AD și CB, care se taie în punctul O, formînd unghiurile opuse la vîrf $\widehat{AOB}$ și $\widehat{COD}$. Să se arate că bisectoarele acestor unghiuri, semidreptele OE și OF, sînt în prelungire.

25. Se dă triunghiul ABC, în care: $\widehat{A}=45°$ și $\widehat{C}=65°$. Cu centrul în A și cu o rază egală cu latura AB se construiește un arc de cerc care taie latura AC în B_1. Se unește B cu B_1. Să se afle mărimea unghiului $\widehat{ABB_1}$.

26. Se consideră un unghi drept $\widehat{xOy}$: Ox este bisectoarea unui unghi $\widehat{AOB}$, Oy este bisectoarea unui unghi $\widehat{COD}$. Să se arate că unghiurile $\widehat{AOC}$ și $\widehat{BOD}$ sînt suplementare.

27. Fiind dat un unghi $\widehat{AOB}$, i se duce bisectoarea OD și se mai duce și o semidreaptă oarecare OC. Să se arate că unghiul $\widehat{DOC}$ este egal cu semisuma sau semidiferența unghiurilor $\widehat{COA}$ și $\widehat{COB}$, după cum semidreapta OC este exterioară sau interioară unghiului $\widehat{AOB}$ dat.

28. Să se demonstreze că, dacă bisectoarele a două unghiuri adiacente formează între ele un unghi α, atunci suma unghiurilor este 2α. Se va trata și cazul cînd unghiul bisectoarelor este drept.

29. Se dă un unghi $\widehat{AOB}$ și se duce OA' perpendiculară pe OA și de aceeași parte cu OB. Se duce apoi OB' perpendiculară pe OB și nu de aceeași parte cu OA. Să se arate că unghiurile $\widehat{AOB}$, $\widehat{A'OB'}$ sînt suplementare și că bisectoarele lor sînt perpendiculare.

30. Să se arate că, dacă diferența dintre două unghiuri cu vîrful comun, o latură comună și celelalte așezate de aceeași parte a laturii comune este de 90°, bisectoarele acelor unghiuri fac între ele un unghi egal cu 45°.

31. Cîte grade are unghiul la centru care cuprinde între laturile lui a 6-a, a 18-a, a 4-a și a 2-a parte din cerc.

32. Diferența a două unghiuri complementare este 14°. Să se calculeze mărimea fiecărui unghi.

33. Un unghi este egal cu $\frac{5}{4}$ din complementul său. Să se afle cîte grade are fiecare unghi.

34. Diferența dintre două unghiuri suplementare este $\frac{3}{5}$ dr. Să se găsească mărimea fiecărui unghi.

Triunghiuri

1. *Se dă un triunghi* ADB, *în care se duce o mediană. Să se arate că dreapta care unește unul din celelalte două vîrfuri ale triunghiului cu mijlocul medianei duse în triunghi împarte latura opusă în două părți, dintre care una este dublul celeilalte.*

Rezolvare: Din piciorul medianei se duce paralelă la dreapta care unește vîrful triunghiului cu mijlocul medianei (fig. 22).

În Δ ABN avem $NM = MB$.

În Δ DCM avem $DN = NM$.

$DN = NM = MB$

$$DN = \frac{BN}{2}$$

$$LN = \frac{CM}{2} = \frac{AN}{4}.$$

2. *Se dă triunghiul isoscel* ABC (AB = AC). *Se prelungește baza triunghiului de o parte și alta cu distanțele* BM = CN (fig. 23). *Să se arate că triunghiul* AMN *este isoscel.*

Rezolvare:

$AB = AC$

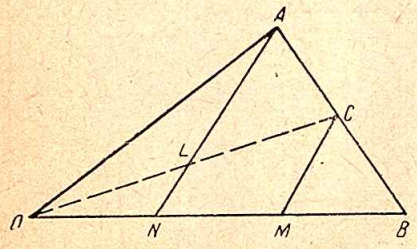


Fig. 22.

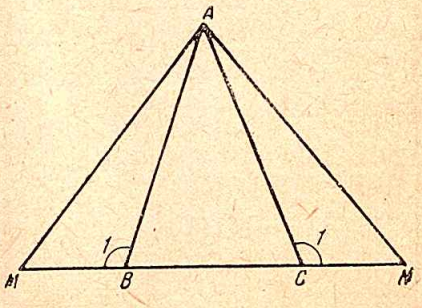


Fig. 23.

$BM = CN$

$\widehat{B_1} = \widehat{C_1} = 180° - \widehat{B} = 180° - \widehat{C}$

$\triangle ABM = \triangle ACN$,

adică $AM = AN$,

deci $\triangle AMN$ este isoscel.

3. *Fie* ABC *un triunghi oarecare și* m_1, m_2, m_3 *lungimile celor trei mediane. Dacă* a, b, c *sînt lungimile laturilor triunghiului, atunci avem* $m_1 + m_2 + m_3 < a + b + c$ (fig. 24).

Rezolvare:

$AM = MA'$.

În $\triangle AA'C$ avem $AA' < AC + CA'$ $\quad 2AM < AC + CA'$

1) $2m_1 < b + c$, $BN = NB'$.

În $\triangle BCB'$ avem $BB' < BC + CB'$, $\quad 2BN < BC + CB'$

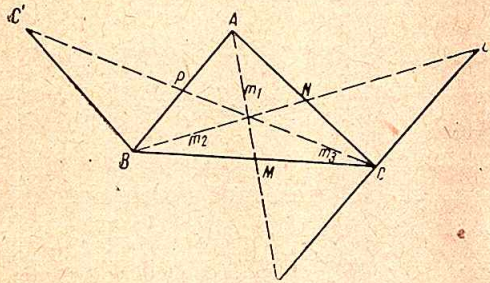


Fig. 24.

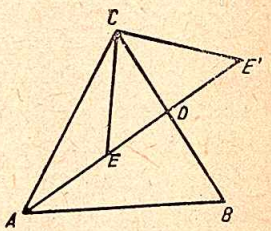


Fig. 25.

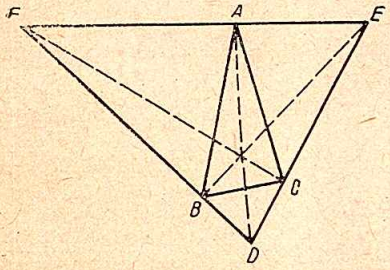


Fig. 26.

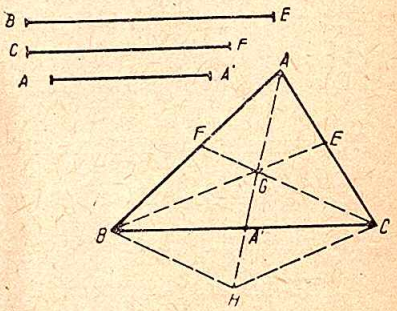


Fig. 27.

2) $2m_2 < a + c$,

$CP = PC'$.

În $\Delta\ CBC'$ avem $CC' < BC + BC'$

$2CP < BC + BC'$

3) $2m_3 < a + b$.

Se adună inegalitățile 1), 2), 3), parte cu parte, și avem:

$2m_1 + 2m_2 + 2m_3 < b + c + a + c + a + b$

$2m_1 + 2m_2 + 2m_3 < 2a + 2b + 2c$

$2(m_1 + m_2 + m_3) < 2(a + b + c)$

$m_1 + m_2 + m_3 < a + b + c$.

4. *În triunghiul echilateral* ABC *se duce mediana* AD, *se ia apoi punctul* E *mijlocul lui* AD *și se unește* E *cu* C (fig. 25). Să se arate că avem $AE < CE$.

Rezolvare:

$AE = ED$; $DE = DE'$.

În $\Delta ECE'$ avem $EE' < EC + CE'$; $2DE < 2EC$; $DE < CE$; $AE < CE$.

5. *Să se construiască un triunghi cunoscînd centrele* D, E, F *ale cercurilor exînscrise laturilor triunghiului* (fig. 26).

Rezolvare: Centrele cercurilor exînscrise sînt vîrfurile triunghiului ale cărui înălțimi se confundă cu bisectoarele interioare ale primului triunghi. Triunghiul cerut se va găsi construind triunghiul DEF și cele trei înălțimi ale sale. Picioarele A, B, C ale înălțimilor sale vor fi vîrfurile triunghiului cerut.

6. *Să se construiască un triunghi cunoscînd cele trei mediane.*

Rezolvare (fig. 27): Se construiește paralelogramul $BGCH$ avînd ca laturi opuse $\frac{2}{3}$ din medianele duse din B și C.

Diagonala GH este $\frac{2}{3}$ din mediana dusă din A. A doua diagonală BC este una din laturile triunghiului. Se ia $GA = GH = \frac{2}{3} AA'$. Se găsește astfel al treilea vîrf al triunghiului. Construcția se bazează pe concurența medianelor, care se face la $\frac{1}{3}$ de bază și $\frac{2}{3}$ de vîrf.

7. *Să se construiască un triunghi, cunoscînd o latură, un unghi adiacent și suma* (S) *sau diferența* (d) *a celorlalte laturi.*

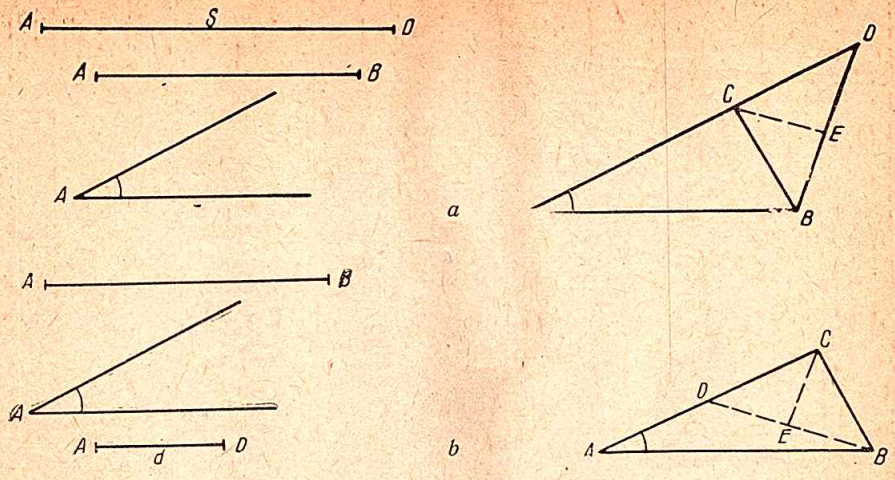


Fig. 28.

Rezolvare (fig. 28, *a*), (fig. 28, *b*):

a) $AD = AC + BC = S$; CE este perpendicular pe mijlocul lui DB; $CD = CB$; ΔDCB este triunghi isoscel.

b) $AD = AC - BC = d$; CE este perpendicular pe mijlocul lui DB; $DC = BC$; ΔCDB este triunghi isoscel.

Pentru efectuarea construcției procedăm astfel:

a) Se unesc punctele B și D, care sînt extremitățile laturilor AB și S. Se construiește mediatoarea laturii DB pe $AD(S)$ într-un punct care este al treilea vîrf al triunghiului cerut (fig. 28, *b*).

b) Pentru determinarea celui de-al treilea vîrf al triunghiului cerut se duce mediatoarea lui DB, care întîlnește prelungirea segmentului diferență într-un punct.

8. *Să se construiască un triunghi cunoscînd o latură* BC, *unghiul opus* A *și suma* (S) *sau diferența* (d) *a celorlalte două laturi.*

Rezolvare: (fig. 29, *a*), (fig. 29, *b*):

a) $\widehat{D} = \widehat{C_1} = \frac{\widehat{A}}{2}$; ΔADC = triunghi isoscel $(AD = AC)$; $BD = AC + AB = S$; $AE \perp CD$; $AE = \frac{1}{2} CD$.

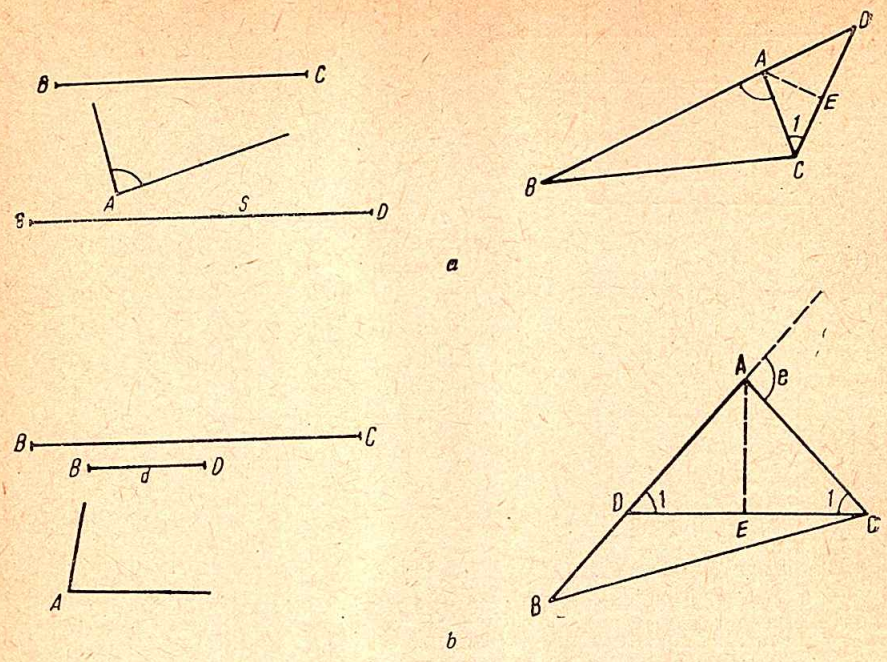


Fig. 29.

b) $\widehat{e}=180°-\widehat{A}$; $\widehat{D}_1=\widehat{C}_1=\frac{\widehat{e}}{2}$; $AC=AD$; $AE \perp DC$; $AE=\frac{1}{2}DC$;

ΔACD este triunghi isoscel.

Procedeu de construcție:

— Se ia unghiul $\widehat{D}$ egal cu $\frac{\widehat{A}}{2}$.

— Pe una din laturi se ia segmentul $DB=AB+AC=S$.

— Din B cu o rază egală cu segmentul BC dat intersectează cealaltă latură în C, avînd astfel al doilea vîrf al triunghiului.

— Se duce mediatoarea segmentului DC, care intersectează pe BD în A, determinînd al treilea vîrf al triunghiului.

Probleme propuse

9. Să se construiască un triunghi oarecare, cunoscînd:

a) $a=65$ mm, $b=54$ mm, $\widehat{C}=70°$.

b) $c=48$ mm, $a=35$ mm, $\widehat{B}=110°$.

c) $c=45$ mm, $\widehat{A}=105°$, $\widehat{B}=40°$

d) $a=5$ cm, $b=6$ cm, $c=6{,}5$ cm.

e) $a=3{,}5$ cm, $b=3{,}8$ cm, $c=5{,}9$ cm.

f) $AB=3{,}6$ cm, $\widehat{A}=48°$, $\widehat{B}=60°$.

10. Să se construiască un triunghi isoscel cunoscînd:

a) $b=4$ cm, $\widehat{A}=36°$.

b) $b=35$ mm, $\widehat{A}=140°$.

c) $a=5$ cm, $b=5{,}9$ cm.

d) $a=6$ cm, $\widehat{B}=\widehat{C}=40°$.

11. Să se construiască un triunghi dreptunghic cunoscînd:

a) $b=42$ mm, $\widehat{C}=58°$.

b) $a=3{,}8$ cm, $c=2{,}8$ cm.

c) $c=2{,}7$ cm, $\widehat{B}=58°$.

d) $c=3$ cm, $b=3{,}5$ cm.

e) $a=4$ cm, $\widehat{B}=65°$.

12. Să se construiască un triunghi cunoscînd latura $BC=4$ cm, unghiul $\widehat{B}=60°$ și mediana laturii BC de 3 cm.

13. Să se construiască un triunghi cunoscînd latura $BC=5$ cm, unghiul $\widehat{C}=54°$ și bisectoarea unghiului $\widehat{C}$ de 4 cm.

14. Să se construiască un triunghi isoscel, avînd unghiul de la vîrf de 40° și înălțimea de 4,5 cm.

15. Să se construiască un triunghi cunoscînd laturile $AB=4$ cm, $AC=6$ cm și mediana corespunzătoare laturii $AC=5$ cm. Să se măsoare unghiul $\widehat{A}$ al triunghiului.

16. Să se construiască un triunghi isoscel cunoscînd înălțimea $AD=5$ cm și unghiul de la vîrf $\widehat{BAC}=70°$.

17. Să se construiască un triunghi oarecare ABC, cunoscînd:

a) două laturi $AB=7{,}5$ cm, $BC=8{,}2$ cm și mediana care e dusă din vîrful A, $AD=3{,}8$ cm;

b) latura $AC=6$ cm, mediana $AD=5$ cm și $\widehat{DAC}=32°$;

c) latura $AB=4{,}8$ cm, unghiul $\widehat{A}=70°$, latura $AC=6$ cm;

d) latura $AC=6$ cm, bisectoarea $AD=5$ cm și $CD=4$ cm.

18. Într-un triunghi ABC prelungim mediana AD cu un segment DE egal cu AD. Să se compare triunghiul ABD cu triunghiul CDE. Ce elemente egale apar?

19. Să se construiască un triunghi ABC cunoscînd:

a) două laturi AB, AC și mediana AD, care cade pe latura a treia;

b) două laturi AB, BC și mediana AD, care cade pe una dintre ele;

c) o latură BC și cele două mediane DE și CF, care pleacă din extremitățile sale;

d) două mediane AD, BE și latura BC, pe care cade una dintre ele,

20. Să se construiască un triunghi isoscel cunoscînd:

a) baza și raza cercului înscris;

b) baza și raza cercului circumscris;

c) înălțimea și unul din unghiurile egale.

21. Să se construiască un triunghi echilateral, cunoscînd:

a) înălțimea; *b)* raza cercului înscris; *c)* raza cercului circumscris.

22. Să se construiască un triunghi dreptunghic cunoscînd una dintre catete și suma sau diferența dintre ipotenuză și cealaltă catetă.

23. Să se construiască un triunghi cunoscînd perimetrul și unghiurile sale.

24. Fie triunghiul isoscel ABC, DE o paralelă cu baza AB. Se duc dreptele BD, AE, care se taie în F. Să se arate că triunghiul DEF este isoscel și triunghiul AFB este de asemenea isoscel.

25. Să se demonstreze că într-un triunghi isoscel medianele care pornesc de la extremitățile bazei sînt egale.

26. Să se demonstreze că, dacă două înălțimi ale unui triunghi sînt egale, triunghiul este isoscel.

27. Mediana dusă pe una din laturile egale ale unui triunghi isoscel împarte perimetrul lui în două părți, una de 15 cm, iar cealaltă de 6 cm. Să se determine cele trei laturi ale triunghiului.

28. În interiorul unui triunghi ABC se duce pe latura BC dreapta AD, astfel încît unghiul $\widehat{CAD}$ să fie egal cu unghiul $\widehat{ACD}$. Perimetrele triunghiurilor ABC și ABD sînt 37 cm și 24 cm. Să se determine lungimea segmentului AC.

29. Într-un triunghi isoscel ABC ($AB=BC$) se duce înălțimea BD. Perimetrul triunghiului ABC este 50 cm, iar perimetrul triunghiului ABD, 40 cm. Să se determine înălțimea BD.

30. Într-un triunghi isoscel ($AB=AC$) se ridică în punctele B și C perpendiculare pe AB, respectiv pe AC. Pe aceste perpendiculare se iau segmentele $BM=CN$. Să se arate că triunghiurile ACN și ABM sînt egale.

31. Se dă un triunghi isoscel cu vîrful în A și se ia un punct O pe bisectoarea unghiului A. Dreapta BO taie pe AC în C' și CO taie pe AB în B'. Să se arate că $BB'=CC'$.

32. Să se demonstreze că două triunghiuri isoscele sînt egale cînd au unghiurile de la vîrf respectiv egale și medianele corespunzătoare vîrfurilor de asemenea egale.

33. Să se demonstreze că două triunghiuri ABC, $A'B'C'$ sînt egale cînd au cîte două laturi respectiv egale, $AB=A'B'$, $AC=A'C'$, și medianele relative la latura a treia de asemenea egale.

34. Două triunghiuri isoscele au unghiurile de la vîrf de 45° și înălțimile care pleacă din aceste vîrfuri de 3 cm. Să se construiască cele două triunghiuri și să se arate că ele sînt egale.

35. Să se demonstreze că, dacă într-un triunghi două laturi și unghiul opus celei mai mici dintre ele sînt respectiv egale cu două laturi și unghiul opus celei mai mici dintre ele dintr-un al doilea triunghi, atunci triunghiurile pot fi sau egale, sau neegale.

36. Să se construiască un triunghi isoscel cu baza $BC=4$ cm și unghiul $\widehat{B}=45°$. Prelungim în ambele părți latura BC în afara triunghiului și luăm $BD=CE=3$ cm. Să se arate că triunghiul ADE este isoscel.

37. Într-un triunghi ABC, $\widehat{B}=80°$, $\widehat{C}=30°$, bisectoarea unghiului B taie latura AC în D. Care este mai mare: BD sau DC?

38. Într-un triunghi ABC se duce mediana AD. Se dă $BC=12$ cm, $AD=7$ cm. Să se compare unghiul $\widehat{B}$ cu unghiul $\widehat{BAD}$, unghiul C cu unghiul $\widehat{CAD}$.

39. Să se demonstreze că într-un triunghi ABC, cel mai mare dintre unghiurile făcute de mediana AD cu latura BC este acela care se opune a latura cea mai mare dintre laturile AB, AC.

40. Triunghiurile ABC, $A'BC$ au o latură comună BC și sînt situate într-o aceeași regiune a planului în raport cu BC. Să se arate că suma laturilor care se taie este mai mare ca suma laturilor care nu se taie.

41. Fie triunghiul ABC, cu unghiul $\widehat{A}$ obtuz și O un punct în interiorul triunghiului. Dreptele BO, CO taie AC, AB respectiv în D și E Să se arate că avem: $BD+CE>BE+ED+DC$.

42. În triunghiul echilateral ABC se duce mediana AD; se ia apoi punctul E mijlocul lui AD și se unește E cu C. Să se arate că avem $AE<CE$.

43. Vrem să facem un pod peste un curs de apă care merge în linie dreaptă, așa fel încît două localități situate de o parte și de alta a cursului de apă să fie egal depărtate de capetele podului, cum arată figura 30. Unde trebuie așezat podul, presupunînd că îl așezăm perpendicular pe direcția cursului de apă.

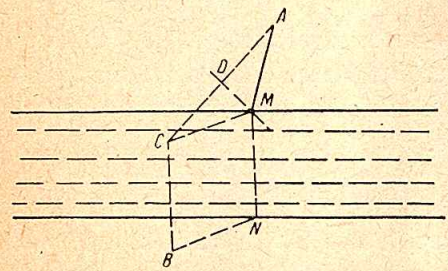


Fig. 30.

44. Într-un triunghi isoscel ABC, una din laturile egale AB este de 14 cm. Din mijlocul D al laturii AB se ridică perpendiculara DE pînă întîlnește latura BC în E, iar punctul E se unește cu A. Perimetrul triunghiului AEC este de 32 cm. Să se determine lungimea segmentului AE știind că $BC=8$ cm.

45. Dintr-un punct sînt duse pe o dreaptă dată două oblice egale depărtarea dintre picioarele lor este de 16 cm. Să se determine proiecția fiecărei oblice pe dreapta dată.

46. În triunghiul isoscel BAC să se arate că suma perpendicularelor duse dintr-un punct oarecare al bazei pe laturile egale este constantă.

47. Fiind dat un triunghi ABC, să se afle pe latura AB un punct D, astfel că ducînd prin D paralela DE la BC, E fiind situat pe AC, să avem $DE=CE$.

48. Prin punctul I de intersecție a bisectoarelor unghiurilor $\hat{B}$ și $\hat{C}$ ale triunghiului ABC se duce o paralelă la BC, care taie AB și AC respectiv în D și E. Să se arate că avem $BD+CE=DE$.

49. Se dă triunghiul isoscel ABC cu vîrful în A și dintr-un punct D oarecare al bazei BC ducem paralela la AB, care taie pe AC în E, și paralela la AC, care taie pe AB în F. Să se arate că perimetrul patrulaterului este egal cu $2AB$.

50. Fiind dat un triunghi echilateral ABC și un punct O în interiorul lui; se duce din O paralela cu AB pînă taie BC în A', paralela la BC pînă taie CA în B', paralela la CA pînă taie AB în C'. Să se arate că suma $AO'+OB'+OC'$ este egală cu latura triunghiului dat.

Capitolul XII

Drepte paralele

1. *Se dă un triunghi oarecare. Să se arate că unghiul format de două bisectoare interioare ale triunghiului dat este egal cu un unghi drept plus jumătate din unghiul celui de-al treilea vîrf.*

Rezolvare: (fig. 31):

$\widehat{BDC} = 90° + \frac{\widehat{A}}{2}$.

În triunghiul BDC avem:

$\widehat{D} = 180° - (\widehat{DBC} + \widehat{BCD})$

$\widehat{D} = 180° - \frac{\widehat{B}+\widehat{C}}{2}$

$\frac{\widehat{B}}{2} + \frac{\widehat{C}}{2} + \frac{\widehat{A}}{2} = \frac{180°}{2}$

$\frac{\widehat{B}}{2} + \frac{\widehat{C}}{2} = 90° - \frac{\widehat{A}}{2}$

$\widehat{D} = 180° - \left(90° - \frac{\widehat{A}}{2}\right)$

$\widehat{D} = 180° - 90° + \frac{\widehat{A}}{2} = 90° + \frac{\widehat{A}}{2}$.

2. *Se să arate că unghiul format de bisectoarea unui unghi a unui triunghi oarecare* ABC, *cu înălțimea construită din același vîrf, este egal cu semidiferența unghiurilor de la bază.*

Rezolvare: (fig. 32):

$\widehat{DAE} = \frac{\widehat{C} - \widehat{B}}{2}$

$\widehat{CAE} = 90° - \widehat{C}$

$\frac{\widehat{A}}{2} = \frac{180° - (\widehat{B} + \widehat{C})}{2}$

$\widehat{DAE} = \frac{180° - (\widehat{B} + \widehat{C})}{2} - (90° - \widehat{C})$

$\widehat{DAE} = \frac{\widehat{A}}{2} - \widehat{CAE}$

$\widehat{DAE} = \frac{180° - \widehat{B} - \widehat{C} - 180° + 2\widehat{C}}{2} = \frac{\widehat{C} - \widehat{B}}{2}$.

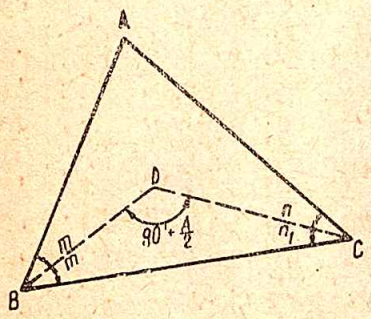


Fig. 31.

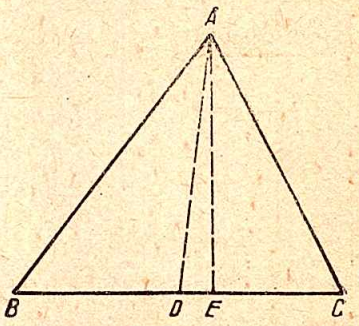


Fig. 32.

3. *Se dă un triunghi isoscel* ABC *cu vîrful* A. *Se prelungeşte* BA *dincolo de* A *cu lungimea* AD = BA *şi se duce dreapta* DC. *Să se arate că unghiul* $\widehat{DCB}$ *este drept.*

Rezolvare (fig. 33): Construcţiile făcute ne arată că: $DA = BA$, $AB = AC$, $AD = AC$, $D_1 = C_1$. Unghiul A exterior triunghiului ACD este egal cu suma unghiurilor interioare nealăturate. $\widehat{A} = \widehat{C}_1 + \widehat{D}_1$, $\widehat{A} = 2\widehat{D}_1$. Triunghiul fiind isoscel, avem: $2\widehat{ACB} + \widehat{A} = 180°$. $\widehat{ACB} = \frac{180° - \widehat{A}}{2}$, $\widehat{ACB} = \frac{180° - 2\widehat{D}_1}{2}$, $\widehat{ACB} = 90° - \widehat{D}_1$, $\widehat{DCB} = \widehat{ACB} + \widehat{C}_1$, $\widehat{DCB} = \widehat{ACB} + \widehat{D}_1$, $\widehat{DCB} = 90° - \widehat{D}_1 + \widehat{D}_1$, $\widehat{DCB} = 90°$.

4. *Intr-un triunghi* ABC *se ia un punct* M. *Să se arate că avem* $\widehat{BMC} > \widehat{BAC}$.

Rezolvare (fig. 34): Prelungim pe BM pînă întîlneşte pe AC în punctul P. Aplicăm teorema unghiului exterior în triunghiurile ABP, MPC, BMC şi avem: $\widehat{BPC} > \widehat{BAC}$, $\widehat{BMC} > \widehat{BPC}$, deci $\widehat{BMC} > \widehat{BAC}$.

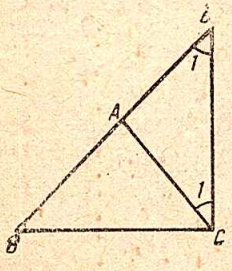


Fig. 33.

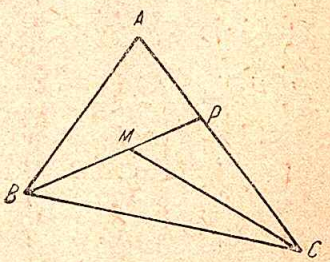


Fig. 34.

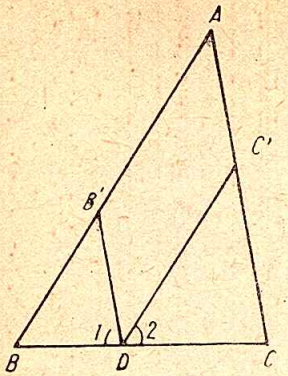


Fig. 35.

5. *Se dă un triunghi oarecare* ABC *și un punct* D *pe latura* BC. *Se duc din* D *paralele la laturile* AB, AC *pînă taie în* C', B' *respectiv laturile* AC, AB. *Să se arate că linia frîntă* B'DC' *este cuprinsă între* AB *și* AC.

Rezolvare (fig. 35): $\widehat{D}_1=\widehat{C}$ și $\widehat{D}_2=\widehat{B}$ ca unghiuri corespondente, $\widehat{C}>\widehat{B}$, $\widehat{D}_1>\widehat{B}$, $\widehat{D}_2<\widehat{C}$. Folosim relațiile între laturi și unghiuri și avem: $AB'+B'B>B'D+DC'$; $AB>B'D+DC'$; $AC'+C'C<B'D+DC'$; $AC<B'D+DC'$; $AC<B'D+DC'<AB$.

Probleme propuse

6. Să se construiască două drepte paralele pe care să le tăiem cu o secantă. Să se arate că:

a) Bisectoarele a două unghiuri alterne interne sînt paralele.

b) Bisectoarele a două unghiuri alterne externe sînt paralele.

c) Bisectoarele a două unghiuri interne și de aceeași parte a secantei sînt perpendiculare.

d) Bisectoarele a două unghiuri externe și de aceeași parte a secantei sînt perpendiculare.

7. Se dă un triunghi dreptunghic ABC, cu $\widehat{A}=90°$. Din A se duce perpendiculara AD pe ipotenuza BC. Să se arate că: $\widehat{BAD}+\widehat{ACD}=\widehat{ABD}+\widehat{DAC}$.

8. Să se arate că dacă două unghiuri au două laturi paralele și celelalte două perpendiculare, suma sau diferența lor este egală cu un unghi drept sau cu trei unghiuri drepte.

9. Se figurează două segmente de dreaptă AB și CD paralele, egale și în același sens. Să se arate că dreptele AC și BD sînt paralele.

10. Se construiește un unghi $ABC=60°$. Pe latura AB se ia un punct M, din care se duce perpendiculara MN pe latura BC. Pe latura BC se ia un punct P, din care se duce perpendiculara PR pe latura AB. Să se arate că triunghiurile BMN și BPR au unghiurile două cîte două egale.

11. Se construiește un unghi ABC. Din A se duce perpendiculara AD pe latura BC, iar din C se duce perpendiculara CE pe latura AB. Segmentele AD și CE se întretaie în O. Să se arate că $OA=OC$ și $OD=OE$.

12. Se dă triunghiul ABC. Paralela dusă prin B la bisectoarea interioară a unghiului A taie prelungirea laturii AC în P. Să se arate că triunghiul ABP este isoscel.

13. Se dă triunghiul ABC și bisectoarea AD. Paralelele duse prin vîrfurile B și C la această bisectoare întîlnesc laturile AC, AB sau prelungirile lor respectiv în E sau F. Să se arate că triunghiurile ABC, AEF sînt egale.

14. Se dau două triunghiuri egale avînd laturile respectiv paralele. Să se demonstreze că dreptele care unesc vîrfurile omologe se întîlnesc în același punct sau sînt paralele.

15. Să se demonstreze că o paralelă la baza unui triunghi isoscel formează cu celelalte două laturi un triunghi isoscel.

16. Să se demonstreze că o paralelă la una din laturile unui triunghi echilateral formează cu celelalte două laturi un triunghi echilateral.

17. Se construiește un triunghi isoscel cu laturile $AB=AC=5$ cm și unghiul cuprins între ele $\widehat{A}=44°$. Se prelungește baza de o parte și de alta cu segmente egale $BD=CE=5$ cm și se unesc punctele obținute cu vîrful A al triunghiului. Să se calculeze unghiurile triunghiului ADE.

18. Să se calculeze al treilea unghi al unui triunghi, cunoscînd două din ele: a) $\widehat{A}=58°29'$; $\widehat{B}=74°35'$; b) $\widehat{B}=104°6'24''$, $\widehat{C}=32°29'50''$; c) $\widehat{C}=2°16'$, $\widehat{A}=72°38''$.

19. Într-un triunghi dreptunghic ($\widehat{A}=90°$) se dă:
a) $\widehat{B}=42°15'24''$; b) $\widehat{C}=53°25''$. Se cere să se afle celălalt unghi ascuțit

20. Într-un triunghi ABC se dă: 1) $\widehat{B}=74°$, $\widehat{C}=42°$. Se cere unghiul format de înălțimea care pleacă din vîrful A cu bisectoarea unghiului $\widehat{A}$. Să se calculeze apoi și în cazul cînd 2) $\widehat{B}=26°$, $\widehat{C}=128°$.

21. Într-un triunghi ABC se dă: a) $\widehat{A}=54°$, $\widehat{B}=60°$. Se duc bisectoarele unghiurilor $\widehat{B}$ și $\widehat{C}$ și se notează cu I punctul lor de intersecție. Să se calculeze unghiul $\widehat{BIC}$. b) Aceeași problemă dacă $\widehat{A}$ își păstrează mărimea $\widehat{A}=54°$, iar unghiul $\widehat{B}$ ia valorile $\widehat{B}=55°$, $\widehat{B}=60°$. Se schimbă rezultatul? c) Să se calculeze unghiul $\widehat{BIC}$ cunoscînd numai unghiul $\widehat{A}=54°$.

22. Fie ABC un triunghi echilateral. Prelungim latura BC dincolo de C cu un segment $CD=BC$ și unim D cu A.

a) Cîte grade are unghiul $\widehat{CDA}$?

b) Aceeași problemă dacă triunghiul ABC este dreptunghic isoscel cu vîrful unghiului drept în B.

23. Fiind dat triunghiul ABC, se prelungește CB cu lungimea BB' $BB'=AB$ și BC cu lungimea $CC'=AC$. Să se calculeze unghiurile triunghiului $AB'C'$.

24. Fiind dat un triunghi dreptunghic în A și AD înălțimea care pleacă din A, se prelungește CD cu lungimea DC', egală cu CD. Să se arate că în triunghiul ABC' diferența unghiurilor ABC' și C' este egală cu un unghi drept.

25. Într-un patrulater $ABCD$ se dau unghiurile:

a) $\widehat{A}=83°$, $\widehat{B}=105°$, $\widehat{C}=100°$;

b) $\widehat{A}=90°$, $\widehat{B}=24°$, $\widehat{C}=30°$.

Se cere să se afle unghiul al patrulea.

26. Un unghi al unui paralelogram este de 55°. Să se afle celelalte unghiuri ale paralelogramului.

27. Într-un dreptunghi, unghiul format de diagonale este de 62°. Să se afle unghiurile formate de o diagonală cu laturile dreptunghiului

28. Să se afle suma unghiurilor:
a) unui patrulater convex regulat;
b) unui pentagon convex regulat;
c) unui decagon convex regulat;
d) unui poligon convex cu 20 laturi (regulat).

Capitolul XIII

Patrulatere

1. *Prin vîrfurile unui triunghi* ABC *se duc paralele la laturile opuse, formîndu-se un nou triunghi. Să se arate că vîrfurile primului triunghi sînt mijloacele laturilor triunghiului format.*

Rezolvare (fig. 36): Se formează cîte două paralelograme pentru fiecare latură în felul următor:

1) În paralelogramul $FACB$ avem $AF=BC$.
În paralelogramul $ABCE$ avem $AE=BC$,
din care rezultă $AF=AE$.

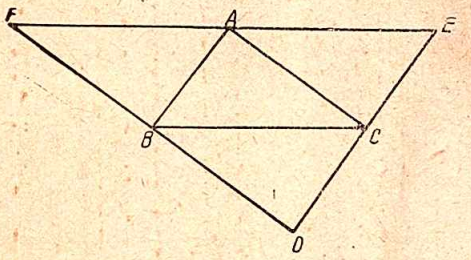


Fig. 36.

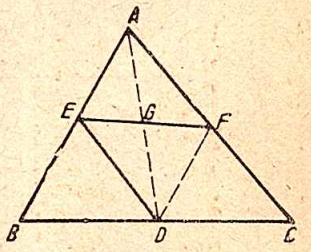


Fig. 37.

2) În paralelogramul $FBCA$ avem $FB=AC$.
În paralelogramul $ABDC$ avem $AC=BD$,
din care rezultă $FB=BD$.

3) În paralelogramul $ABCE$ avem $AB=CE$.
În paralelogramul $ABCD$ avem $AB=CD$,
din care rezultă $CE=CD$.

2. *În triunghiul* ABC, *dreapta* EF *unește mijloacele laturilor* AB *și* AC. *Mediana dusă la a treia latură intersectează dreapta* EF. *Se cere să se arate că cele două drepte se taie în părți egale.*

Rezolvare (fig. 37):

Se unește piciorul medianei cu mijloacele laturilor AC, AB:
$FD=EB=AE$
$ED=AF=FC$.

Figura $AEDF$ este paralelogram $AG=GD$; $EG=GF$ ca diagonale în paralelogramul $AEDF$.

3. *Să se construiască un paralelogram cunoscînd:*

1) *o latură și cele două diagonale;*

2) *două laturi și una din diagonale.*

Rezolvare (fig. 38):

1) Se poate construi triunghiul BOC cu latura dată și cu jumătățile de diagonale. Apoi, prelungind BO și CO pentru a le dubla, avem vîrfurile A și D.

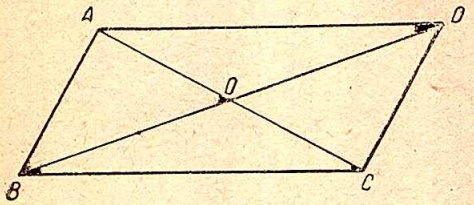


Fig. 38.

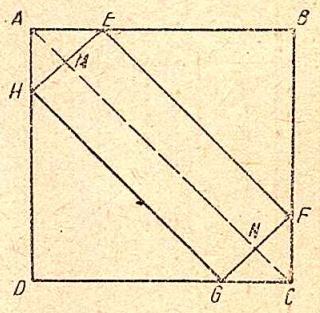


Fig. 39.

2) Se poate construi triunghiul ABC și paralelogramul cerut; se obține imediat ducînd AD și CD paralele la laturile opuse.

4. *Într-un pătrat* ABCD, *la două vîrfuri opuse se iau pe fiecare latură segmente egale. Să se arate că figura formată unind două cîte două punctele astfel obținute este un dreptunghi de perimetru constant.*

Rezolvare (fig. 39):

$AE=AH=CF=CG$

$ME=AM$, $EF=MN$, $FN=NC$.

$\triangle AHE=\triangle GCF$; $\triangle EBF=\triangle HDG$ sînt triunghiuri isoscele.

$\triangle AME=\triangle AMH=\triangle CFN=\triangle CGN$

$AM=CN=HM=ME=GN=NF$.

Perimetrul $=2(2AM+EF)=2AC=$const.

5. *Într-un patrulater oarecare, bisectoarele interioare formează un nou patrulater. Să se arate că unghiurile opuse ale patrulaterului astfel format sînt suplementare.*

Rezolvare (fig. 40): În patrulaterul oarecare $ABCD$, suma unghiurilor este egală cu patru unghiuri drepte $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}+\hat{D}=4$ dr. $\widehat{EAD}+\widehat{GBC}+\widehat{BCG}+\widehat{EDA}=\frac{\hat{A}}{2}+\frac{\hat{B}}{2}+\frac{\hat{C}}{2}+\frac{\hat{D}}{2}=2$ dr. (1). $\widehat{EAD}+\widehat{GBC}+\widehat{BCG}+\widehat{EDA}=2$ dr. În triunghiurile AED și BGC, suma celor 6 unghiuri este

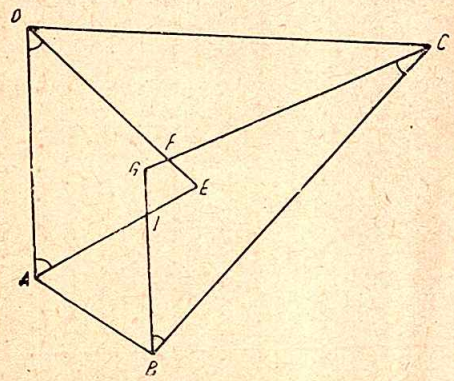


Fig. 40.

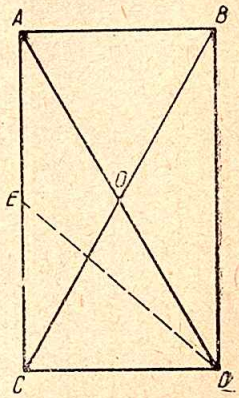


Fig. 41.

egală cu 4 unghiuri drepte (2) $\widehat{EAD}+\widehat{GBC}+\widehat{BCG}+\widehat{EDA}+\widehat{E}+\widehat{G}=4$ dr. Scădem din egalitatea (2) egalitatea (1) și rezultă $\widehat{E}+\widehat{G}=2$ dr. Dacă unghiurile $\widehat{E}$ și $\widehat{G}$ sînt suplementare, atunci și celelalte două unghiuri opuse $\widehat{H}$ și $\widehat{F}$ vor fi suplementare.

6. *Să se construiască un dreptunghi la care se cunoaște:* a) *perimetrul și unghiul diagonalelor;* b) *unghiul diagonalelor și diferența laturilor adiacente;* c) *perimetrul și diagonala.*

Rezolvare (fig. 41): *a*) Problema se reduce la a construi un triunghi dreptunghic BAC, fiind date unghiurile și suma laturilor unghiului drept. *b*) Se poate construi triunghiul AED pentru că se cunoaște baza AE și cele două unghiuri adiacente $\widehat{DAE}=90°-\frac{\widehat{AOC}}{2}$, $\widehat{AED}=90°+45°=135°$.

c) Se construiește triunghiul dreptunghic ACD, fiind date ipotenuza AD și suma celorlalte laturi.

7. *Să se construiască un trapez* ABCD, *cunoscînd cele patru laturi.*

Rezolvare (fig. 42): Se construiește paralelogramul $AECD$, în care DC este baza mică, iar AD o latură neparalelă, și triunghiul CEB, în care $EB=AB-DC$ și $CE=AD$.

8. *Să se construiască un trapez cunoscînd bazele și cele două diagonale.*

Rezolvare (fig. 43): $AF=B+b$, $DB=CF$, AC și CF sînt diagonale în trapez. Se construiește triunghiul AFC, avînd ca bază suma bazelor trapezului și ca laturi diagonalele date.

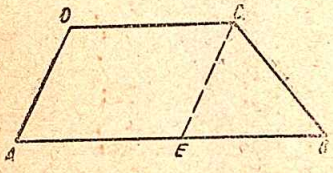


Fig. 42.

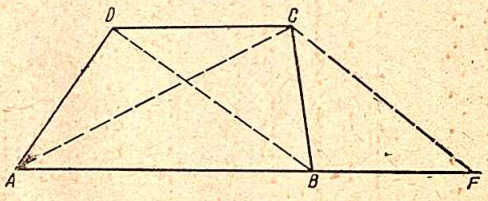


Fig. 43.

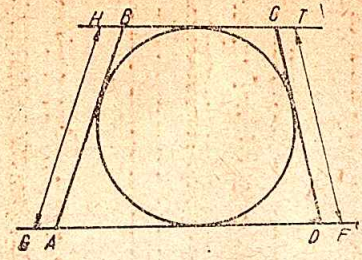


Fig. 44.

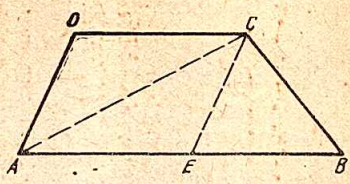


Fig. 45.

9. *Să se construiască un trapez, cunoscînd raza cercului înscris şi cele două laturi neparalele.*

Rezolvare (fig. 44) : Se construieşte cercul O şi se trasează două tangente paralele, apoi se duce o tangentă AB, egală cu una din laturile neparalele GH, şi o altă tangentă DC, egală cu cealaltă latură TF.

10. *Să se construiască un trapez cunoscînd bazele şi unghiurile.*

Rezolvare (fig. 45) : Se iau lungimile date pentru baze în AB şi AE, apoi unghiurile date $\hat{A}$ şi $\hat{B}$ şi se duce CE paralelă la AD. Avem $AE = DC$.

11. *Să se construiască un patrulater cunoscînd mijloacele a trei laturi şi o dreaptă paralelă şi egală cu latura a patra.*

Rezolvare (fig. 46) : Se construieşte paralelogramul $EFGH$ şi se găseşte mijlocul H al laturii a patra. Se duce apoi dreapta AHD paralelă cu m şi se măsoară jumătăţile lungimii m în HA şi HD, obţinînd două vîrfuri A şi D. Se trasează AEB şi DGC şi se ia EA în EB şi GD în GC, dînd celelalte două vîrfuri.

Probleme propuse

12. Într-un triunghi ABC se unesc mijlocul M al laturii AB cu mijlocul N al laturii AC. Din punctul N se duce o paralelă la AB, care intersectează latura BC în D. Să se arate că patrulaterul $MNDB$ este un paralelogram.

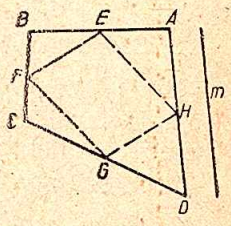


Fig. 46.

13. Se unesc unul după altul mijloacele laturilor unui romb. Să se arate că patrulaterul format este dreptunghi.

14. Se unesc mijloacele laturilor unui dreptunghi. Să se arate că patrulaterul format este un romb.

15. Să se construiască un dreptunghi cu diagonala de 64 mm și unghiul dintre ele de 60°.

16. Două paralelograme $ABCD$ și $CDEF$ au pe CD latură comună. Să se arate că, dacă punctele A, B, E, F nu sînt în linie dreaptă, atunci ele sînt vîrfurile unui paralelogram.

17. Să se construiască un romb cu latura de 5 cm și diagonala mare de 8 cm.

18. Să se construiască un trapez isoscel, avînd baza mare de 8 cm baza mică de 5 cm și înălțimea de 4 cm.

19. Într-un paralelogram $ABCD$, se duce bisectoarea unghiului A pînă taie pe CD în M și bisectoarea unghiului C pînă taie pe AB în N. Să se arate că:

a) Patrulaterul $AMCN$ este paralelogram.

b) Patrulaterul $BMDN$ este paralelogram.

20. Să se construiască un patrulater $ABCD$, cunoscînd laturile $AB = 3$ cm, $BC = 3{,}8$ cm, $CD = 4{,}5$ cm și diagonalele $AC = 5{,}3$ cm și $BD = 6{,}1$ cm.

21. Să se construiască un paralelogram avînd latura $AB = 5$ cm latura $AD = 4$ cm și $\hat{A} = 45°$.

22. Să se construiască un dreptunghi avînd latura $AB = 4$ cm și latura $BC = 5$ cm.

23. Să se construiască un romb avînd diagonalele de 5 cm și 6 cm.

24. Să se construiască un romb avînd latura de 5 cm și un unghi de 60°.

25. Să se construiască un paralelogram cu diagonalele $d = 6{,}2$ cm, $d_1 = 3{,}4$ cm și latura $a = 3{,}8$ cm.

26. Un romb are diagonala de 5 cm și înălțimea de 2,2 cm. Să se construiască rombul.

27. Să se construiască un pătrat cu diagonala de 7 cm.

28. Să se construiască un trapez cunoscînd diferența bazelor de 1,5 cm, laturile neparalele de 2,5 cm și 1,8 cm și diagonala mare de 4,2 cm.

29. Să se construiască un trapez cu baza mare $CD=8$ cm, baza mică $AB=5$ cm, o latură neparalelă $AD=6$ cm și unghiul $D=60°$.

30. Să se construiască un trapez dreptunghic cu baza mare de 7 cm, baza mică de 5 cm, iar latura perpendiculară pe bază de 4 cm.

31. Bazele unui trapez sînt de 42 mm și 28 mm, iar diagonalele de 40 mm și 54 mm. Să se construiască trapezul.

32. Să se arate că bisectoarele unghiurilor unui paralelogram, formează un dreptunghi.

33. Să se arate că picioarele perpendicularelor duse din vîrful unui dreptunghi pe diagonale formează un nou dreptunghi.

34. Pe diagonala AC a pătratului $ABCD$ se ia un punct E între A și C, astfel ca AE să fie egală cu latura pătratului. Să se calculeze unghiurile triunghiului BCE.

35. Se prelungește diagonala AC a pătratului $ABCD$ cu o lungime $CE=AB$. Să se calculeze unghiurile triunghiului BCE.

36. Să se construiască un patrulater ale cărui laturi să fie de 1 cm, 2 cm, 3 cm, 4 cm, iar diagonala care trece între prima și a patra latură să fie de 2,6 cm.

37. Să se construiască un paralelogram cu o diagonală de 6 cm, cealaltă diagonală de 5 cm și una din laturi de 4 cm.

38. Să se construiască un patrulater cu laturile de 1,2 cm, 1,8 cm, 2,4 cm, 3 cm și unghiul dintre latura a doua și a treia să fie de 102°.

39. Să se construiască un dreptunghi cu o latură de 6 cm, iar unghiul făcut de această latură cu diagonala alăturată de 30°.

40. Să se construiască un dreptunghi cunoscînd o latură de 5 cm și unghiul diagonalelor de 30°.

41. Din punctul O de intersecție al diagonalelor unui romb se coboară perpendiculare pe laturile rombului. Să se arate că picioarele acestor perpendiculare sînt vîrfurile unui dreptunghi.

42. Un patrulater este împărțit de una din diagonale în două triunghiuri, dintre care unul are perimetrul de 25 cm, iar celălalt de 27 cm; perimetrul patrulaterului este de 32 cm. Să se găsească lungimea diagonalei patrulaterului.

43. Într-un trapez isoscel, înălțimea împarte baza mare în două segmente, din care cel mai mic este de 12 mm. Linia mijlocie a trapezului este 32 mm. Să se calculeze bazele.

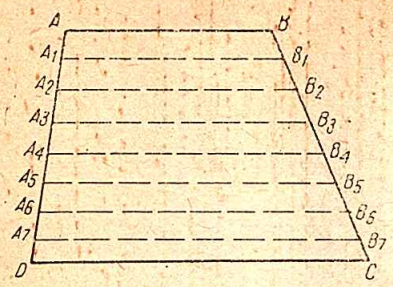


Fig. 47.

44. Un romb are un unghi de 120°, iar diagonala mică egală cu 8 cm. Se cere să se afle perimetrul rombului.

45. Cablul unui funicular poartă un cărucior cu cărbune de 500 kg. Să se afle pe cale grafică forţele care întind cablul cînd căruciorul se află la mijloc între doi piloni şi cablul formează cu orizontala un unghi de 9°.

46. Se dă un dreptunghi $ABCD$, la care diagonalele se taie în O. Printr-un punct E situat pe AB se duce dreapta EO, care intersectează latura CD în G. Prin punctele E şi G se duc paralele la diagonala AC, care intersectează pe BC şi AD respectiv în F şi H.

a) Să se arate că patrulaterul $EFGH$ este un paralelogram.

b) Să se arate că perimetrul paralelogramului $EFGH$ este constant oricare ar fi poziţia punctului E pe latura AB.

47. O piesă de la o maşină este formată dintr-un contur de sîrmă $ABCD$, cum arată figura 47, în formă de trapez. Latura AD este împărţită în 8 părţi egale, fiind legată de latura BC prin fire paralele. Se întreabă cîţi milimetri de sîrmă se întrebuinţează la alcătuirea reţelei din această piesă, ştiind că dimensiunile ei sînt : $AB = 30$ mm şi $CD = 50$ mm.

Capitolul XIV

Cercul

1. *Să se arate că într-un cerc coardele paralele duse prin extremităţile unui diametru sînt egale, şi că dreapta care uneşte celelalte extremităţi ale lor este de asemenea un diametru.*

Rezolvare (fig. 48):

$\widehat{ABD} = \widehat{CAD}$ (alterne interne) $\Rightarrow \widehat{AD} = \widehat{CB}$, $\widehat{DB} = \widehat{AB} - \widehat{AD}$; $\widehat{AC} = \widehat{BA} - \widehat{CB}$

$\widehat{AB} = \widehat{BA} = 180°$ și $\widehat{AD} = \widehat{CB} \Rightarrow \widehat{DB} = \widehat{AC} \Rightarrow AC = DB$ (coarde egale opuse la arce egale)

Pentru ca CD să fie diametru trebuie ca dreptele OC și OD să fie în prelungire, adică punctele O, C, D să fie colineare.

$\widehat{BD} = \widehat{AC} \Rightarrow \widehat{BOD} = \widehat{AOC}$ (unghiuri la centru) $\Rightarrow$ punctele O, C, D coliniare.

Într-un cerc diametrul este axă de simetrie. Se știe că:

$\widehat{CB} = \widehat{AD}$ și $\widehat{AC} = \widehat{BD}$, deci: $\widehat{AC} + \widehat{AD} = \widehat{BD} + \widehat{BC} \Rightarrow \widehat{CD} = \widehat{DC} \Rightarrow CD$ axă de simetrie $\Rightarrow CD$ este diametru.

2. *Printr-un punct I într-un cerc să se ducă cea mai mare și cea mai mică coardă.*

Rezolvare (fig. 49):

În $\triangle IHO$ ($\widehat{H} = 90°$) $OH < OI$

În $\triangle IPO$ ($\widehat{P} = 90°$) $OP < OI \Rightarrow OP < OH < OI$ (ca distanțe de la centrul cercului la coardele MN, FG, CD).

$MN > FG > CD$ (coardele mai apropiate de centrul cercului sînt mai mari iar cele mai depărtate sînt mai mici).

CD este cea mai mică coardă dusă prin punctul I din cercul O.

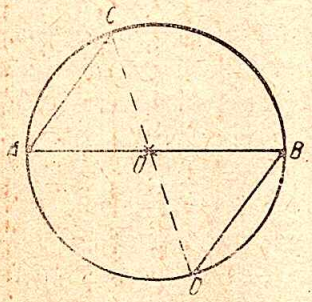


Fig. 48.

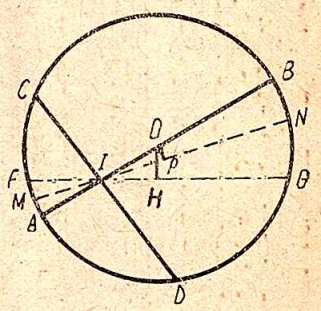


Fig. 49.

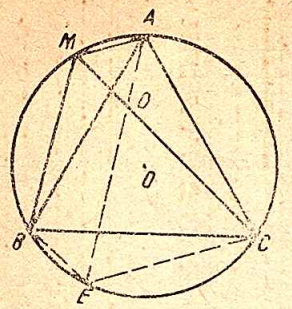


Fig. 50.

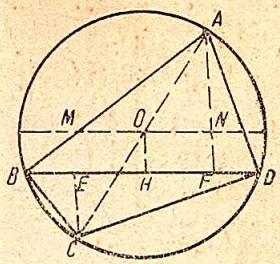


Fig. 51.

Unind pe I cu O se obține cea mai mare coardă, deoarece trecînd prin O distanța ei la centrul cercului O este zero. Acesta este diametrul $AB \perp CD$.

3. *Să se arate că distanța de la un punct de pe cerc la unul din vîrfurile triunghiului echilateral înscris în cerc este egală cu suma distanțelor din acel punct la celelalte două vîrfuri.*

Rezolvare (fig. 50): Prin A se duce AE paralelă la MB și coardele EB, EC. Se formează triunghiurile echilaterale DAM și DEC, în care avem:

$DM = AM$

$DC = EC = BM$,

deci:

$MC = MA + MB$.

4. *Laturile opuse ale unui patrulater inscriptibil în care o diagonală este diametru se proiectează pe cealaltă diagonală prin segmente egale.*

Rezolvare (fig. 51): În patrulaterul $ABCD$ înscris în cerc, AOC este diametru și una dintre diagonalele patrulaterului $ABCD$. Se proiectează vîrfurile A și C pe diagonala BD și avem $CE \perp BD$, $AF \perp BD$ BF = proiecția laturii AB, DE = proiecția laturii DC pe diagonala BD. Pentru a demonstra că $BF = DE$, se construiește prin punctul O diametrul paralel cu diagonala BD; prelungim pe CE, și ducem perpendiculara OH. Se formează triunghiurile OAN și OCM, care sînt dreptunghice și egale.

$OM = ON$, $OC = OA = R$.

De asemenea, $EF = 2EH = 2HF$

$BF = BE + EF$, $DE = DF + EF$

$BF = DE$ deoarece $BE = FD$.

5. *Se dă cercul O şi patrulaterul $ABCD$ circumscris cercului. Să se arate că suma a două laturi opuse din patrulater este egală cu suma celorlalte două laturi opuse.*

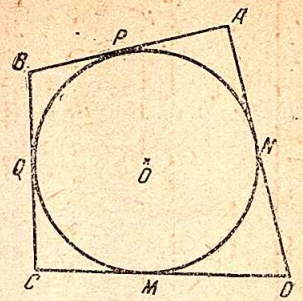


Fig. 52.

Rezolvare (fig. 52):

$BC + AD = AB + CD$

$BQ + QC + AN + ND =$

$= QP + PA + CM + MD$.

Se foloseşte proprietatea tangentelor duse dintr-un punct exterior la un cerc. Ştim că aceste tangente sînt egale. Această proprietate permite să scriem:

$DM = DN$, $\quad PA = AN$

$QB = PB$, $\quad CQ = CM$.

Probleme propuse

6. Pe laturile unui unghi ABC de 120° se iau segmentele $AB = BC = 4$ cm. Să se ducă prin A, B, C un cerc şi să se determine lungimea razei sale.

7. Să se construiască un cerc care să treacă prin două puncte date, iar centrul lui să fie pe o dreaptă dată.

8. Să se construiască un cerc care să treacă prin două puncte date A şi B, astfel încît unghiul dintre raza cercului dusă prin A şi coarda AB să fie de 30°

9. Să se împartă un arc dat în 4, 8, 16 părţi egale.

10. Dintr-un punct dat pe o latură a unui unghi să se construiască un cerc care să taie pe cealaltă latură a unghiului o coardă de o lungime dată.

11. Să se construiască un cerc de rază dată, care să fie tangent la o dreaptă dată, într-un punct dat al acestei drepte.

12. Să se construiască un cerc care să treacă printr-un punct dat și să fie tangent la o dreaptă dată într-un punct dat.

13. Să se construiască un cerc tangent la laturile unui unghi dat, fiind dat și punctul lui de contact pe una din laturi.

14. Să se construiască un cerc cu raza de 5 cm, tangent la laturile unui unghi XOY.

15. Dintr-o tablă de oțel se taie un cerc în care se știe că o coardă care subîntinde arcul de 120° se găsește la o distanță de 10 cm de centrul cercului. Care este raza cercului?

16. Care sînt pozițiile relative a două cercuri O, O' de raze r, r', cînd avem una din următoarele situații:

a) $OO'=1$ cm, $r=6$ cm, $r'=4$ cm.
b) $OO'=10$ cm, $r=4$ cm, $r'=6$ cm.
c) $OO'=4$ cm, $r=4$ cm, $r'=8$ cm.
d) $OO'=10$ cm, $r=2$ cm, $r'=3$ cm.
e) $OO'=3$ cm, $r=6$ cm, $r'=3$ cm.

17. Fiind date două cercuri O_1, O_2 de raze r_1, r_2, să se afle poziția cercurilor unul față de celălalt și apoi să se construiască în următoarele cazuri:

a) $O_1O_2=10$ cm, $r_1=6$ cm, $r_2=5$ cm.
b) $O_1O_2=7$ cm, $r_1=9$ cm, $r_2=2$ cm.
c) $O_1O_2=8$ cm, $r_1=4$ cm, $r_2=2$ cm.
d) $O_1O_2=5$ cm, $r_1=3$ cm, $r_2=2$ cm.
e) $O_1O_2=4$ cm, $r_1=8$ cm, $r_2=2$ cm.

18. Două cercuri cu razele egale de 3 cm se taie în A și B. Să se arate că arcele celor două cercuri cuprinse între A și B sînt egale.

19. Două cercuri concentrice au razele de 5 cm și 3 cm. Să se afle raza unui cerc care să fie tangent la amîndouă cercurile și apoi să se construiască cercul.

20. O coardă taie un diametru sub un unghi de 30° și-l împarte în două segmente de 2 cm și 6 cm. Să se afle distanța de la centru la coardă.

21. Dintr-un punct de pe cerc se duc două coarde perpendiculare, dintre care una se găsește la o distanță de 6 cm și a doua la o distanță de 10 cm de la centru. Să se determine lungimile coardelor.

22. Într-un punct A de pe un cerc cu raza de 2,5 cm se duce tangenta. Să se construiască o altă tangentă la cerc, care să facă cu prima un unghi de 60°, apoi a treia tangentă, care să facă cu a doua un unghi de 90°.

23. Se dau un cerc cu raza de 3 cm și un punct exterior A la distanța de 7 cm de centru. Să se construiască tangente din punctul A la cerc.

24. Să se construiască un triunghi dreptunghi avînd ipotenuza de 6 cm și înălțimea de 2,5 cm.

25. Pe un cerc cu centrul O se duc punctele A, B, C, astfel ca arcul $\overset{\frown}{AB}=70°$ și arcul $\overset{\frown}{BC}=130°$. Să se afle măsura unghiurilor $\overset{\frown}{AOB}$, $\overset{\frown}{BOC}$, $\overset{\frown}{COA}$, $\overset{\frown}{ABC}$, $\overset{\frown}{BCA}$, $\overset{\frown}{CAB}$.

26. Se dă un cerc cu diametrul AB. Ducem în A și B tangente la cerc pe care luăm de o parte și alta a lui AB două segmente $AT_1=BT_2=AB$. Să se arate că patrulaterul AT_1BT_2 este un paralelogram și să se calculeze unghiurile acestui paralelogram.

27. Se dau două cercuri O_1 și O_2 tangente exterior în A și se duce o tangentă comună exterioară, BC, B și C fiind punctele de contact Să se arate că unghiul $\overset{\frown}{BAC}$ este drept.

28. Două drepte pleacă din același punct M și sînt tangente la un cerc în A și B. Ducem raza OB și o prelungim dincolo de B cu distanța $BC=OB$. Să se arate că $\overset{\frown}{AMC}=3\overset{\frown}{BMC}$.

29. Să se demonstreze că arcele dintr-un cerc cuprinse între două drepte paralele sînt egale.

30. Paralel cu dreapta O_1O_2, care unește O_1 și O_2, centrele a două cercuri egale, se duce o secantă care taie cercul O_1 în A și B iar cercul O_2 în C și D. Să se arate că: $AC=BD=O_1O_2$.

31. Printr-un punct dat în interiorul unui cerc să se ducă o coardă care să fie împărțită în două părți egale de acest punct.

32. Să se calculeze un unghi înscris în cerc care corespunde unui arc egal cu jumătatea unui cerc. Să se figureze acest unghi într-un cerc cu raza de 3 cm.

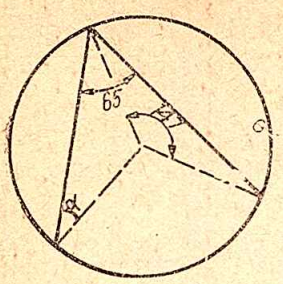


Fig. 53.

33. Să se calculeze un unghi înscris care corespunde unui arc egal cu un sfert dintr-un cerc. Să se figureze acest unghi într-un cerc cu raza de 4 cm.

34. Pe un cerc se iau 4 puncte A, B, C, D, în așa fel ca arcul $\overset{\frown}{AB}=36°15'$, arcul $\overset{\frown}{BC}=18°10'$ și arcul $\overset{\frown}{CD}=25°20'$. Să se afle mărimea unghiurilor $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$, $\widehat{COD}$, $\widehat{ABC}$, $\widehat{BCD}$, $\widehat{CDA}$, $\widehat{ACD}$, $\widehat{BDA}$, $\widehat{CAB}$.

35. Pe diametrul AB al unui semicerc de centru O, se iau două puncte M și N, simetrice în raport cu punctul O. Se duc din M și N drepte paralele, care întîlnesc semicercul în P și Q. Să se arate că patrulaterul $MNPQ$ este un trapez dreptunghic.

36. Să se construiască un patrulater inscriptibil, cunoscînd diagonala AC, unghiul D, o latură AB și unghiul diagonalelor.

37. Să se construiască un patrulater oarecare $ABCD$, cunoscînd:

a) diagonala AC, o latură AB și unghiurile;

b) două unghiuri adiacente B și C, latura AB adiacentă la unul dintre unghiuri și diagonalele.

38. Într-un patrulater înscris într-un cerc unghiurile alăturate unei laturi sînt: $\widehat{A}=25°$ și $\widehat{B}=142°$. Să se afle celelalte două unghiuri ale patrulaterului.

39. Două cercuri concentrice sînt tăiate de o dreaptă MN în 4 puncte consecutive: A, B, C, D. Să se arate că segmentele AB și AD au același mijloc. Să se deducă de aici că $AB=CD$.

40. Să se calculeze unghiul α din figura 53.

41. Într-un cerc se duce o coardă MN, a cărei distanță la centru OQ este egală cu jumătatea razei cercului. La capetele coardei se duc tangentele la cerc care se taie în punctul P. Se cere:

a) Să se determine unghiurile patrulaterului $MPNO$.

b) Să se afle distanța PQ.

c) Să se calculeze raza cercului circumscris patrulaterului $MPNO$.

Figuri asemenea

1. *Se dă segmentul* AB = 8 cm. *Să se găsească pe* AB *un punct* M, *astfel încît să avem* : $\frac{AM}{MB} = \frac{3}{1}$.

Rezolvare : (fig. 54) : Segmentul AB va fi împărţit grafic în 10 părţi egale. Apoi la a 3-a diviziune de la extremitatea A se va găsi punctul M căutat. În general, segmentul de dreaptă dat se împarte într-un număr de părţi egale cu numărul egal cu suma numărătorului şi numitorului $\frac{AM}{MB} = \frac{m}{n}$, $AM = (m+n)$ părţi egale.

2. *Triunghiul* ABC *are laturile* AB = 5 cm, BC = 6 cm, AC = 4 cm. *Pe latura* AB *se ia un punct* N, *astfel ca* AN = 2 cm. *Din punctul* N *se duce o paralelă la* AC, *care* taie *latura* BC *în* M. *Să se determine lungimile segmentelor* BM, MC *şi* MN.

Rezolvare (fig. 55) : Se aplică teorema lui Tales în formele derivate :

$$\frac{AN}{AB} = \frac{MC}{BC}, \quad \frac{2}{5} = \frac{MC}{6}, \quad MC = \frac{2 \cdot 6}{5} = 2{,}4 \text{ cm}$$

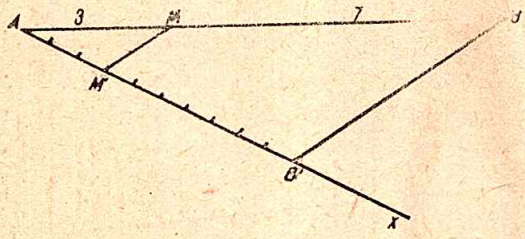


Fig. 54.

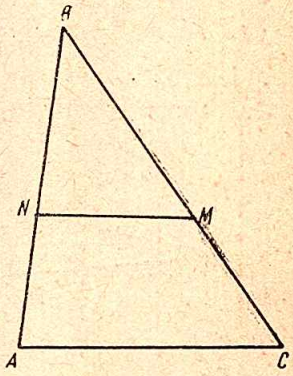


Fig. 55.

$BM = BC - MC$

$BM = 6 - 2,4 = 3,6$ cm.

Pentru NM se ia proporția:

$$\frac{BM}{BC} = \frac{NM}{AC}, \quad \frac{3,6}{6} = \frac{NM}{4}, \quad NM = \frac{3,6 \cdot 4}{6} = 2,4 \text{ cm}.$$

3. *Să se construiască un segment de dreaptă care să fie al patrulea proporțional între segmentele care au măsurile* 2 cm, 4 cm, 3 cm *și să se calculeze lungimea lui.*

Rezolvare (fig. 56): Pe una din laturile unui unghi oarecare XAY se așază cap la cap segmentele $AD = 2$ cm și $DB = 4$ cm, iar pe cealaltă latură se așază segmentul $AE = 3$ cm. Se unește D cu E și se duce BC paralelă cu DE. Segmentul EC egal cu 6 cm aflat din calcul este segmentul căutat:

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}, \quad \frac{2}{4} = \frac{3}{EC}, \quad EC = \frac{4 \cdot 3}{2}, \quad EC = 6 \text{ cm}.$$

4. *Se dă triunghiul dreptunghic* BAC; *într-un punct* P *de pe ipotenuza* BC *a triunghiului dreptunghic, se ridică o perpendiculară, care intersectează catetele în punctele* N *și* M. *Să se arate că produsul distanțelor de la punctul* P *la punctele* N *și* M *este egal cu produsul segmentelor determinate de punctul* P *pe ipotenuză.*

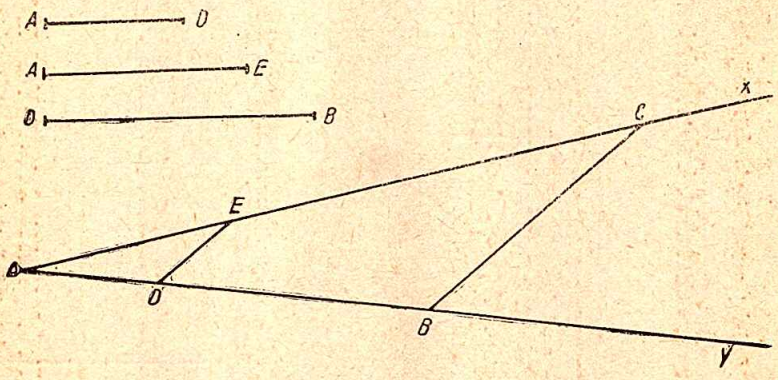


Fig. 56.

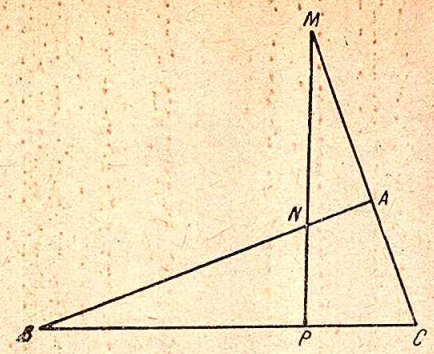


Fig. 57.

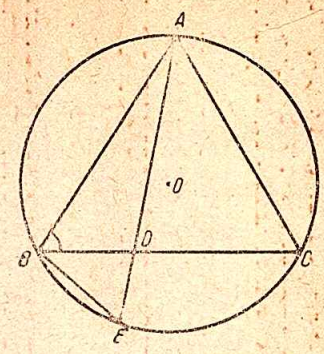


Fig. 58.

Rezolvare (fig. 57): Se formează triunghiurile dreptunghic MPB și NPC, care sînt asemenea: $\Delta PMB \sim \Delta PCN$ $\measuredangle C = \measuredangle M$ (laturi perpendiculare) $\frac{PM}{PB} = \frac{PC}{PN}$, $PM \cdot PN = PB \cdot PC$.

5. *Într-un triunghi isoscel* ABC *cu baza* BC *se duce o secantă* ADE, *care taie baza în punctul* D *și cercul circumscris triunghiului în punctul* E. *Să se arate că:* $AB^2 = AD \cdot AE$.

Rezolvare (fig. 58):

$$\Delta\, ABD \sim \Delta\, EAB$$

$$\widehat{ABD} = \widehat{AEB} = \frac{\widehat{AB}}{2}$$

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AB}{AE},\quad AB^2 = AD \cdot AE.$$

Probleme propuse

6. Să se împartă segmentul $AB = 3$ cm în raportul $\frac{1}{2}$.

7. Să se împartă segmentul $AB = 5$ cm în raportul $\frac{3}{4}$.

8. Să se împartă segmentul $AB = 4$ cm în raportul $\frac{2}{3}$.

9. Să se împartă segmentul $AB=2$ cm în 3 părți egale.

10. Să se împartă segmentul $AB=5$ cm în 4 părți egale.

11. Să se afle un segment care împreună cu segmentele $a=3$ cm, $b=5$ cm și $c=6$ cm să formeze o proporție

12. Să se afle un punct M pe segmentul $AB=10$ cm care să-l împartă în raportul $\frac{13}{7}$.

13. Se dă un segment $AB=8$ cm. Să se afle și să se construiască segmentul CD, știind că: $\frac{AB}{CD}=\frac{3}{5}$.

14. Un segment $AB=6$ cm este împărțit de un punct M în raportul $\frac{2}{7}$. Să se afle segmentele MA și MB.

15. Să se construiască un punct M, care împarte segmentul AB în raportul $\frac{AM}{MB}=\frac{1}{2}$. Să se afle rapoartele $\frac{AM}{AB}$ și $\frac{MB}{AB}$

16. Un punct K împarte un segment AB în raportul $\frac{m}{n}$. Să se calculeze rapoartele $\frac{AK}{AB}$, $\frac{KB}{AB}$.

17. Să se construiască triunghiul ABC având: $AB=4$ cm, $AC=5$ cm, $BC=6$ cm. Să se împartă laturile triunghiului în 8 părți egale.

18. Se dau segmentele $AB=4$ cm, $CD=5$ cm, $EF=6$ cm. Se cere să se calculeze segmentele și să se construiască un segment GH, astfel încît: $\frac{AB}{CD}=\frac{EF}{GH}$.

19. Se dă segmentul $AB=3$ cm. Să se găsească pe AB un punct M, astfel încît: $\frac{AM}{MB}=\frac{2}{3}$.

20. Să se împartă segmentul $AB=10$ cm în părți proporționale cu segmentele: $a=6$ cm, $b=5$ cm, $c=9$ cm. Să se rezolve numeric și grafic.

21. Să se construiască a patra proporțională între segmentele: $a=5$ cm, $b=7$ cm, $c=10$ cm.

22. Se dă un segment $AB=7$ cm. Să se împartă în 3 segmente proporționale cu numerele 2, 3, 9.

23. Se dă paralelogramul $ABCD$. Pe diagonala BD se ia un punct M. Paralelele duse din M laturilor AB, BC, întîlnesc laturile AD, DC în N, P. Să se arate că: $\frac{AN}{ND}=\frac{CP}{PD}$. Să se deducă din aceasta că NP este paralelă cu diagonala AC.

24. Într-un trapez, baza mică $AB=36$ mm, $BC=30$ mm, baza mare $CD=48$ mm și $AD=24$ mm. Se prelungesc laturile neparalele pînă se întîlnesc în punctul M. Să se afle segmentele MA și MB.

25. Se dă trapezul $ABCD$, avînd pe BC, AD ca baze. Diagonalele AC, BD se întîlnesc în punctul I. Să se arate că $\frac{AI}{IC}=\frac{DI}{IB}$. Dacă O este punctul de întîlnire al prelungirilor laturilor neparalele AB și CD, avem: $\frac{AO}{AB}=\frac{DO}{DC}$.

26. Trei segmente AB, AC, BC, au lungimile de 60 cm, 50 cm, 40 cm. Segmentele $A'C'$, $A''C''$ unesc AB cu BC, astfel ca depărtările extremităților lor de intersecția B să fie $A'B=12$ cm, $A''B=48$ cm, $CB=8$ cm, $C''B=32$ cm. Se întreabă dacă cele trei segmente care unesc pe BA cu BC sînt paralele.

27. Pe o dreaptă se iau segmentele $AB=3$ cm, $BC=4$ cm, $CD=5$ cm. Prin A, B, C, D se duc paralele care determină pe o dreaptă segmentele A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1. Să se afle segmentele B_1C_1 și C_1D_1, știind că $A_1B_1=1{,}6$ cm.

28. Pe o dreaptă luăm segmentele $AB=2$ cm, $BC=3$ cm, $CD=4$ cm. Prin A, B, C, D ducem paralele care intersectează o dreaptă (Δ) în punctele A_1, B_1, C_1, D_1. Să se afle segmentele A_1B_1, B_1C_1 și C_1D_1 cînd $A_1D_1=18$ cm.

29. La un moment dat, lungimea umbrei unui coș de fabrică este de 34 m. În același moment, un băț vertical înalt de 2 m dă o umbră de 1,40 m. Să se afle înălțimea coșului.

30. Un stîlp pentru fire electrice este înalt de 7 m. La înălțimea de 2 m este legat de un contrafort cu o bază orizontală. La ce depărtare de piciorul contrafortului s-a făcut legătura, dacă acesta are 9 m.

31. Secantele duse într-un punct O intersectează două drepte paralele în punctele A, A'; B, B'; C, C'; D, D'. Să se demonstreze $\frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'} = \frac{OC}{OC'} = \frac{OD}{OD'}$.

32. La latura BC a unui triunghi ABC să se construiască două paralele, astfel ca rapoartele de asemănare să fie $\frac{2}{3}$ și $\frac{7}{4}$.

33. Se dă triunghiul ABC, avînd $AB=6$ cm, $AC=8$ cm, $BC=10$ cm. Se ia pe AB un punct D, astfel încît $AD=1{,}5$ cm. Paralela dusă din D laturii BC întîlnește latura AC în E, iar prin E se duce o paralelă la AB care întîlnește latura BC în F. Să se calculeze lungimile segmentelor AE, EC, BF, DE, EF, FC.

34. Se dă triunghiul dreptunghic ABC, vîrful unghiului drept fiind A. Știind că ipotenuza este de 2 cm, iar unghiul B de 60°, să se afle lungimea segmentului dus din mijlocul ipotenuzei și paralel cu cateta AB.

35. Se figurează un triunghi ABC, avînd $\hat{A}=90°$, $\hat{B}=45°$ și $AB=45$ mm. Se cere să se construiască un triunghi AEF asemenea cu ABC, raportul de asemănare fiind $\frac{2}{5}$.

36. Un triunghi ABC are un unghi de 60° și raportul laturilor ce formează acest unghi este $\frac{5}{4}$. Să se construiască un triunghi asemenea cu cel dat, avînd o latură de 40 mm alăturată unghiului de 60°.

37. Două triunghiuri ABC și DEF au respectiv laturile: $AB=20$ mm, $BC=35$ mm, $CA=45$ mm și $DE=12$ mm, $EF=21$ mm, $FD=27$ mm. Se cere să se arate dacă sînt asemenea și care este raportul lor de asemănare.

38. Se figurează triunghiul ABC cu laturile: $AB=50$ mm, $BC=60$ mm, $CA=70$ mm. Să se construiască un triunghi asemenea cu el, raportul de asemănare fiind $\frac{5}{3}$.

39. Să se construiască un triunghi dreptunghic cu o catetă de 25 mm asemenea cu un alt triunghi dreptunghic dat, care are un unghi ascuțit de 30°.

40. Se figurează un triunghi dreptunghic avînd catetele de 30 mm și 40 mm. Să se construiască un triunghi dreptunghic asemenea cu primul, avînd raportul de asemănare $\frac{4}{7}$.

41. Triunghiurile ABC, $A_1B_1C_1$ au $\widehat{A}=\widehat{A}_1$ și $\widehat{B}=\widehat{B}_1$.

a) Se dă $a=10$, $b=14$, $a_1=25$, $c_1=20$. Să se afle c și b_1.

b) Se dă $a=35$, $a_1=21$, $c-c_1=8$. Să se afle c și c_1.

42. Două triunghiuri isoscele au unghiurile din vîrf egale. Latura și baza unuia din triunghiuri sînt de 17 cm și 10 cm, baza celuilalt este de 8 cm. Să se afle latura acestuia.

43. Două triunghiuri au laturile de 1 m, 1,5 m și 2 m, apoi celălalt are laturile 10 cm, 15 cm și 20 cm. Se întreabă dacă cele două triunghiuri sînt asemenea.

44. Aceeași problemă pentru triunghiurile care au laturile primul m, 2m și 15 dm, iar al doilea 12 dm, 8 dm și 16 dm.

45. Laturile unui triunghi sînt de 0,8 m, 1,6 m și 2 m. Perimetrul unui triunghi asemenea este de 5,5 m. Să se afle laturile acestui triunghi.

46. Două poligoane au unghiurile egale, fără a avea laturile proporționale. Sînt aceste poligoane asemenea?

47. Două poligoane au laturile proporționale fără a avea unghiurile egale. Sînt aceste poligoane asemenea?

48. Două poligoane asemenea au raportul de asemănare egal cu 1. Ce se poate spune despre aceste poligoane?

49. Laturile unui pentagon sînt de 35 cm, 14 cm, 28 cm, 21 cm și 42 cm. Cea mai mică latură a altui pentagon asemenea cu el este de 12 cm. Să se determine celelalte laturi ale pentagonului.

50. Laturile unui patrulater sînt proporționale cu 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, 2, perimetrul unui patrulater asemenea cu el este 75 cm. Să se determine laturile patrulaterului al doilea.

51. Laturile unui patrulater sînt de 10 dm, 15 dm, 20 dm și 25 dm. Într-un patrulater asemenea cu el, suma laturii celei mai mari și a celei mai mici este de 28 dm. Să se determine laturile patrulaterului al doilea.

52. Laturile cele mai mari a două poligoane asemenea sînt, respectiv, de 35 m și 14 m, iar diferența dintre perimetrele lor este de 60 m. Să se determine perimetrele celor două poligoane.

53. Două triunghiuri ABC, ABD au aceeași bază. Dintr-un punct E al bazei AB paralelele la AC și AD întîlnesc laturile BC și BD în F și G. Să se demonstreze că FG este paralelă cu CD.

54. Se dă un romb cu latura a. Prin vîrful A se duce o secantă care intersectează prelungirile laturilor CB, CD în E și F. Să se demonstreze că: $\frac{1}{CE} + \frac{1}{CF} = \frac{1}{a}$.

55. Într-un triunghi ABC se duce prin vîrful B și prin mijlocul O al medianei AD o dreaptă care taie pe AC într-un punct E. Să se afle valoarea rapoartelor $\frac{EA}{EC}$ și $\frac{OB}{OE}$.

56. Într-un triunghi ABC cu laturile $AB=10{,}8$ cm și $AC=9$ cm se duce segmentul CD, astfel încît $\sphericalangle ADC=\sphericalangle ACB$. Să se afle lungimea segmentului AD.

57. Se dă trapezul $ABCD$, în care BC este paralelă cu AD. Fie O punctul de intersecție al diagonalelor. Se dă: $AO=8$ cm, $OC=1$ dm și $BD=27$ cm. Să se determine OB și OD.

58. Într-un triunghi ABC, în care latura $AB=3$ cm și $BC=7{,}5$ cm, bisectoarea unghiului B taie latura opusă în D. Din punctul D se duc paralele la AB și BC. Să se calculeze lungimea laturilor patrulaterului format.

Capitolul XVI

Relații metrice

1. *Un dreptunghi are proiecția bazei pe diagonală de* 3,2 cm, *iar proiecția înălțimii pe aceeași diagonală de* 1,8 cm. *Să se afle dimensiunile dreptunghiului.*

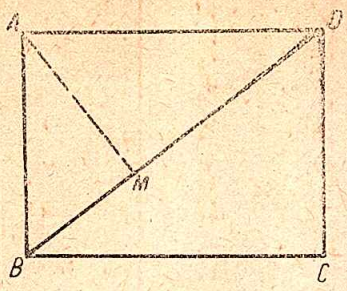


Fig. 59.

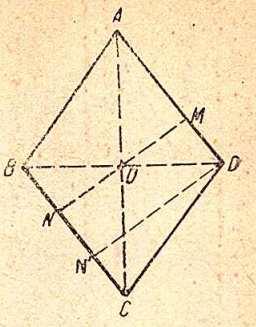


Fig. 60.

Rezolvare (fig. 59): Se dau: $MD=3{,}2$ cm, $BM=1{,}8$ cm. Se cere: AD și AB; $BD=BM+MD=1{,}8+3{,}2=5$ cm. Pentru aflarea dimensiunilor dreptunghiului aplicăm teorema catetei:

$AB^2=BM\cdot BD$; $AB^2=1{,}8\cdot 5=9$; $AB=3$ cm.

$AD^2=MD\cdot BD=3{,}2\cdot 5=16$; $AD=4$ cm.

2. *Piciorul înălțimii unui triunghi* ***dreptunghic*** *împarte ipotenuza în două segmente* m= 6,4 cm și n = 3,6 cm. *Să se calculeze laturile triunghiului.*

Rezolvare: Se dau: $DB=m=6{,}4$ cm; $CD=n=3{,}6$ cm. Se cere: BC=ipotenuza; AC, AB (catete). $BC=m+n$, $BC=3{,}6+6{,}4=10$ cm; $BC=10$ cm. Pentru aflarea catetelor se aplică teorema catetei:

$AC^2=BC\cdot CD$; $AC^2=10\cdot 3{,}6=36$; $AC=6$ cm.

$AB^2=BC\cdot BD$; $AB^2=10\cdot 6{,}4=64$; $AB=8$ cm.

3. *Un romb are diagonalele de* 60 m *și* 80 m. *Să se afle perimetrul rombului.*

Rezolvare (fig. 60): Se dă: $BD=60$ m; $AC=80$ m. Se cere: perimetrul $=4AB$; $AO=\frac{AC}{2}$; $AO=40$ m; $BO=\frac{BD}{2}$, $BO=30$ m. În triunghiul dreptunghic AOB se aplică teorema lui Pitagora:

$AB^2=AO^2+OB^2$; $AB^2=1\,600+900=2\,500$.

$AB=50$ m, perimetrul $=4\ AB=200$ m.

4. *Un triunghi isoscel are înălțimea de* 10 cm *și una din laturile egale de* 25 cm. *Să se afle proiecția înălțimii pe această latură, perimetrul triunghiului și depărtarea de la mijlocul bazei la această latură.*

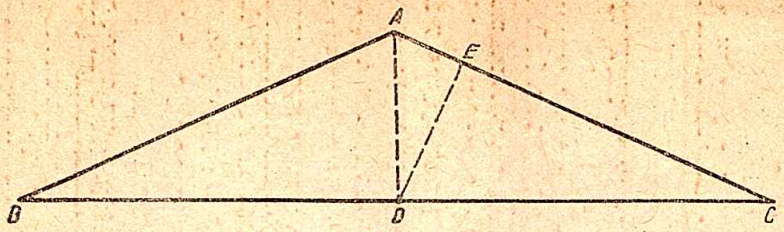


Fig. 61.

Rezolvare (fig. 61): Se dau: $AD=10$ cm, $AC=25$ cm. Se cere AE (proiecția înălțimii); P_{ABC} (perimetrul triunghiului), DE (depărtarea pînă la una din laturile egale). În triunghiul dreptunghic ABC aplicăm teorema lui Pitagora: $DC^2=AC^2-AD^2$; $DC^2=625-100=525$; $DC=23$ cm.

În triunghiul dreptunghi ADC aplicăm teorema catetei:

$DC^2=AC\cdot EC$; $EC=\frac{DC^2}{AC}=\frac{525}{25}=21$ cm; $AE=AC-EC=25-21=4$ cm

$DE^2=AE\cdot EC$; $DE^2=4\cdot 21=84$; $DE=9$ cm; $AE=4$ cm; $BC=2DC=$ $=46$ cm $P(ABC)=2\cdot 25+46=96$ cm.

5. *Se dă trunghiul oarecare* ABC. *Prin vîrful* B *al triunghiului se duce* BD, *care taie pe* AC *sau prelungirea sa, astfel încît unghiul* CBD *să fie egal cu unghiul* CAB. *Să se arate că* BD *este medie proporțională între* AD *și* CD.

Rezolvare (fig. 62):

$\triangle ABD\sim\triangle BCD$

$\frac{AD}{BD}=\frac{BD}{CD}$

$BD^2=AD\cdot CD$

$BD=\sqrt{AD\cdot CD}$.

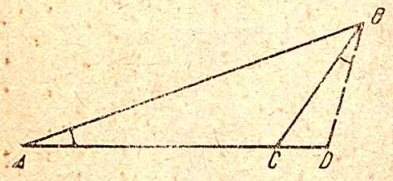


Fig. 62

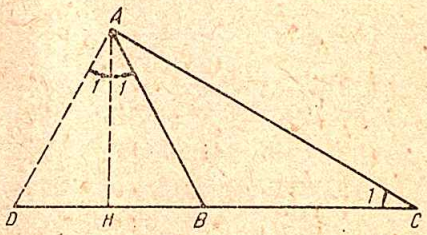


Fig. 63.

6. *Într-un triunghi oarecare, diferența unghiurilor de la bază este egală cu un unghi drept. Să se arate că înălțimea corespunzătoare bazei este media proporțională între distanțele de la picior sau la extremitățile bazei.*

Rezolvare (fig. 63): Se construiește un triunghi isoscel având unghiul format de laturile egale egal cu unghiul C al bazei și ca înălțime înălțimea corespunzătoare bazei.

$\widehat{ABC} - \widehat{C} = 90°$

$HD = HB$

$\widehat{HAD} = \widehat{HAB} = \widehat{C}$

$\widehat{DAC} = 90°$

$AH^2 = HD \cdot HC = HB \cdot HC$

$AH = \sqrt{HB \cdot HC}$.

7. *Într-un triunghi dreptunghic, în mijlocul unei catete se construiește o perpendiculară pe ipotenuză. Să se arate că diferența pătratelor segmentelor formate de perpendiculara pe ipotenuză este egală cu pătratul celeilalte catete.*

Rezolvare (fig. 64): Se exprimă pătratele segmentelor formate pe ipotenuză de perpendiculara construită pe ea din mijlocul catetei considerate.

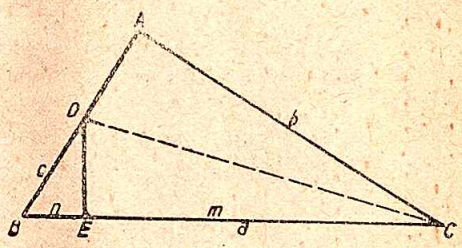


Fig. 64.

$AD = DB$

$BC = m$

$BE = n$

$m^2 = DC^2 - DE^2$

$n^2 = BD^2 - DE^2$

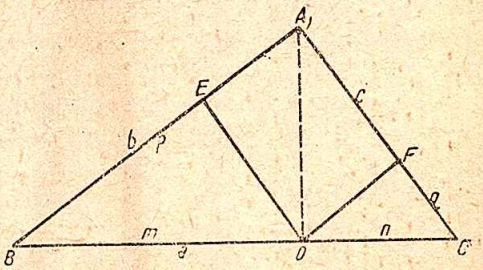


Fig. 65.

$$m^2 - n^2 = DC^2 - DE^2 - BD^2 + DE^2$$

$$m^2 - n^2 = DC^2 - BD^2$$

$$BD = AD$$

$$m^2 - n^2 = DC^2 - AD^2 = AC^2$$

$$m^2 - n^2 = b^2$$

8. *Într-un triunghi dreptunghic se duce înălțimea unghiului drept. Să se arate că raportul proiecțiilor segmentelor determinate de înălțime pe ipotenuză, pe catetele alăturate, este egal cu raportul cuburilor acelorași catete.*

Rezolvare (fig. 65):

$BE = p$, $CF = q$

$\frac{b^2}{c^2} = \frac{m}{n}$, $\frac{b^4}{c^4} = \frac{m^2}{n^2}$

$\triangle ABD \sim \triangle DEB$, $\frac{m}{b} = \frac{p}{m}$

$\triangle ADC \sim \triangle DFC$, $\frac{n}{c} = \frac{q}{n}$, $n^2 = c \cdot q$

$\frac{b^4}{c^4} = \frac{bp}{cq}$, $\frac{b^3}{c^3} = \frac{p}{q}$.

Probleme propuse

9. Să se calculeze ipotenuza triunghiului dreptunghic cînd se dau catetele: *a*) 12 cm și 35 cm; *b*) 56 cm și 33 cm; *c*) 4 m și 9 dm.

10. Să se calculeze cateta cînd se dă ipotenuza și o catetă: *a*) 289 și 240; *b*) 269 și 69; *c*) 145 și 143.

11. Într-un triunghi dreptunghic, catetele se notează cu a și b, iar ipotenuza cu c, proiecțiile catetelor a și b pe ipotenuză cu a_c și b_c, înălțimea construită din unghiul drept cu h. Toate segmentele considerate sînt exprimate în aceeași unitate de măsură. Dîndu-se două elemente, se cere să se calculeze celelalte două elemente ale triunghiului dreptunghic.

a_1) $a = 15$, $b = 20$
a_2) $a = 24$, $b = 7$
a_3) $a = 4$, $b = 5$
a_4) $a = 100$, $c = 125$
a_5) $b = 65$, $c = 169$
a_6) $a = 600$, $c = 625$
a_7) $a = 6$, $a_c = 3{,}6$
a_8) $b = 7$, $b_c = 1{,}96$

a$_9$) $c=29$, $a_c=15\frac{6}{29}$

a$_{10}$) $c=3$, $b_c=2$

a$_{11}$) $a_c=1\frac{1}{2}$, $b_c=2\frac{2}{3}$

a$_{12}$) $a_c=2$, $b_c=18$

a$_{13}$) $a=136$, $h=120$

a$_{14}$) $b=9$, $h=8\frac{32}{41}$.

12. Într-un triunghi dreptunghic ABC se duce înălțimea AD pe ipotenuză. Se dă : $BD=3{,}2$ cm și $DC=6{,}8$ cm. Să se calculeze înălțimea AD.

13. Un triunghi dreptunghic are înălțimea de 6 cm și unul din segmentele formate pe ipotenuză de 2 cm. Să se afle ipotenuza.

14. Un triunghi dreptunghic are ipotenuza BC de 15 cm și proiecția catetei AB pe ipotenuză de 5,4 cm. Să se calculeze catetele triunghiului.

15. Un triunghi dreptunghic are o catetă de 12 cm și proiecția ei pe ipotenuză de 7,2 cm. Să se afle ipotenuza.

16. Să se demonstreze că într-un triunghi dreptunghic raportul pătratelor catetelor este egal cu raportul proiecțiilor pe ipotenuză.

17. Să se afle diagonala pătratului de latură a.

18. Laturile unui dreptunghi sînt egale cu a, b. Să se afle raza cercului circumscris.

19. Un acoperiș are forma unui triunghi isoscel ABC, în care laturile egale AB, CB sînt de 9 m, iar baza AC este de 15 m. Să se afle înălțimea BD.

20. Un trapez isoscel are bazele de 10 cm și 24 cm și o latură neparalelă de 25 cm. Să se afle înălțimea.

21. Un trapez isoscel are o latură neparalelă de 41 cm, înălțimea de 4 dm și linia mijlocie de 45 cm. Să se afle bazele.

22. Un cerc are raza de 89 dm și o coardă de 16 m. Să se afle depărtarea de la centru la coardă.

23. Într-un cerc de rază 15 cm se construiesc două coarde paralele AB, CD, de o parte și de alta a centrului. Dacă $AB=18$ cm, $CD=24$ cm, să se afle distanța dintre coarde.

24. La un cerc cu raza de 36 cm se duce o tangentă dintr-un punct a cărui distanță la centru este de 85 cm. Să se afle lungimea tangentei.

25. Raportul dintre catetele unui triunghi dreptunghic este $\frac{5}{6}$, iar ipotenuza este 122 cm. Să se afle segmentele în care înălțimea împarte ipotenuza.

26. Raportul dintre catetele unui triunghi dreptunghic este $\frac{3}{2}$, iar înălțimea împarte ipotenuza în două segmente, din care unul este cu 2 m mai mare decît celălalt. Să se determine ipotenuza.

27. Raportul dintre catetele unui triunghi dreptunghic este $\frac{3}{7}$, iar înălțimea dusă din vîrful unghiului drept este de 42 cm. Să se determine segmentele ipotenuzei.

28. Două cercuri sînt tangente exterioare și au razele 16 cm și 25 cm. Să se afle lungimea tangentei comune.

29. Razele a două cercuri exterioare sînt de 27 cm și 13 cm, iar distanța centrelor de 50 cm. Să se afle lungimea tangentelor comune.

30. Diagonalele unui romb sînt de 14 dm și 48 dm. Să se afle înălțimea rombului.

31. Proiecția unui punct situat pe un cerc formează pe diametrul cercului segmentele: *a)* 12 cm și 3 cm; *b)* 16 cm și 9 cm; *c)* 2 dm și 5 dm. Să se afle depărtarea de la punct la diametru.

32. Un triunghi dreptunghic are un unghi ascuțit de 45° și o catetă de 3 cm. Să se afle perimetrul triunghiului.

33. Un triunghi oarecare ABC are laturile $AB=13$ m, $BC=21$ m și înălțimea $AD=12$ m. Perpendiculara dusă în A pe AB întîlnește latura BC în E. Să se afle perimetrul triunghiului ACE.

34. Trei triunghiuri dreptunghice ABC, CDE, EFG au ipotenuzele AC, CE, EG în prelungire și sînt asemenea, avînd celelalte laturi omologe paralele. Cunoscînd $AB=39$ m, $CD=30$ m, $EF=21$ m și $AG=120$ m, să se calculeze BD și DF.

35. Un patrulater $ABCD$ are diagonalele perpendiculare și $\widehat{A}=90°$. Se cunosc lungimile diagonalelor $AC=8{,}4$ m, $BD=12{,}5$ m și lungimea laturii $AB=7{,}5$ m. Să se afle perimetrul patrulaterului.

36. Perimetrul unui romb este 16 cm, iar o diagonală 4,8 cm. Să se afle cealaltă diagonală.

37. Într-un trapez dreptunghic, diferența bazelor este de 20 cm, latura care nu este perpendiculară pe baze este de 35 cm, iar diagonala mare de 42 cm. Să se calculeze bazele trapezului.

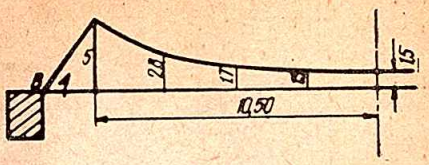


Fig. 66.

38. În figura 66 se arată schema unui pod suspendat, construit simetric față de axa care se vede în partea dreaptă a figurii. Să se calculeze lungimea totală a cablului care poartă podul începînd din B, știind că barele de susținere verticală se află la distanțe egale.

Capitolul XVII

Funcțiile trigonometrice ale unui unghi ascuțit

1. *Să se deducă teoremele catetei și înălțimii într-un triunghi dreptunghic folosind definițiile funcțiilor trigonometrice.*

Rezolvare (fig. 67): Considerăm triunghiul dreptunghic ABC cu unghiul drept în A și ducem înălțimea AD.

Pentru teorema catetei avem:

$$\Delta ADC \sim \Delta BAC, \cos C = \frac{DC}{AC} = \frac{AC}{BC}.$$

Într-un triunghi dreptunghic, o catetă este medie proporțională între ipotenuză și proiecția ei pe ipotenuză.

$$AC^2 = BC \cdot DC$$

$$\Delta ADB \sim \Delta BAC$$

$$\cos B = \frac{BD}{AB} = \frac{AB}{AC}, \quad AB^2 = BC \cdot BD.$$

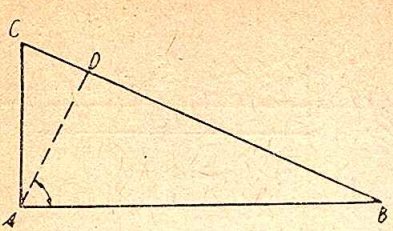


Fig 67.

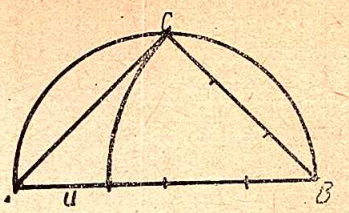


Fig. 68.

Într-un triunghi dreptunghic, înălțimea este medie proporțională între segmentele determinate de ea pe ipotenuză: $AD^2 = CD \cdot BD$.

Pentru teorema înălțimii avem: $\Delta ABC \sim \Delta ADB$, $\widehat{B} = \widehat{CAD}$, $\operatorname{tg} B = \operatorname{tg} CAD = \frac{CD}{AD} = \frac{AD}{BD}$.

2. *Să se construiască unghiul al cărui sinus este egal cu* $\frac{3}{4}$.

Rezolvare (fig. 68): Pentru aceasta trebuie să construim un triunghi dreptunghic în care raportul dintre o catetă și ipotenuză să fie egal cu $\frac{3}{4}$ și să luăm unghiul ascuțit opus catetei. Descriem un semicerc cu diametrul $AB = 4\ u$, unde u este segmentul unitate. Apoi descriem un arc de cerc cu centrul în B și cu o rază egală cu 3, tăind cercul într-un punct C, care este al treilea vîrf al triunghiului dreptunghic înscris în semicerc. Unghiul căutat este unghiul A, pentru că $\sin A = \frac{3}{4}$. Dacă se ia unghiul B, atunci $\cos B = \frac{3}{4}$. Prin același procedeu se construiește și unghiul al cărui cosinus este dat.

$$\sin A = \frac{3}{4}$$

$$\cos B = \frac{3}{4}.$$

3. *Să se construiască unghiul* x, *știind că* $\operatorname{tg} x = \frac{3}{2}$.

Rezolvare (fig. 69): Construim un triunghi dreptunghic în care una dintre catete este egală cu trei segmente unitate, iar cealaltă cu două

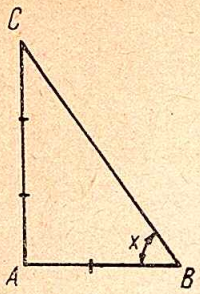


Fig. 69.

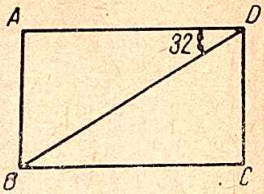


Fig. 70.

segmente unitate considerate. Unghiul opus catetei de 3 unități este cel căutat, pentru că tangenta sa este $\frac{3}{2}$. Dacă vom considera unghiul alăturat catetei de trei unități, atunci el corespunde funcției trigonometrice cotangentă. Deci, același procedeu se folosește și la construcția unui unghi x, cunoscînd valoarea cotangentei sale.

$$\widehat{B}=x \qquad \operatorname{tg} x=\frac{3}{2}$$

$$\operatorname{tg} B=\frac{AC}{AB} \qquad \operatorname{ctg} x=\frac{3}{3}.$$

4. *Într-un dreptunghi, o diagonală este egală cu* 14 cm, *iar unghiul pe care-l formează cu una dintre laturi este de* 32°. *Să se afle laturile dreptunghiului.*

Rezolvare (fig. 70): În triunghiul dreptunghic BAD, o catetă este egală cu ipotenuza BD înmulțită cu sinusul unghiului opus, sau cu cosinusul unghiului alăturat.

Avem astfel:

$AB=BD\cdot\sin 32°$ $\qquad$ $AD=BD\cdot\cos 32°$

$AB=14\cdot 0{,}52992$ $\qquad$ $AD=14.\,0{,}84805$

$AB\approx 7{,}42$ cm $\qquad$ $AD=11{,}87$ cm.

5. *Un romb are un unghi de* 120°, *iar diagonala mică este de* 8 cm. *Se cere să se afle perimetrul rombului.*

Rezolvare (fig. 71): Într-un romb, o diagonală este bisectoarea unghiului respectiv.

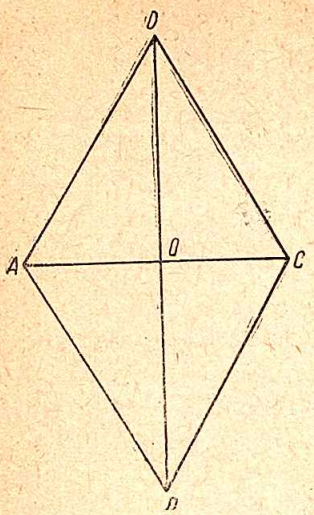


Fig. 71.

Astfel, în triunghiul OAD:

$\widehat{DAO}=60°$ și $OA=4$ cm

$\cos \widehat{DAO}=\frac{AO}{AD}$

$\cos 60°=\frac{4}{AD}$

$AD=\frac{4}{\cos 60°}$

$AD=8$ cm.

Perimetrul $=4\ AD=32$ cm.

Probleme propuse

6. Un triunghi isoscel are baza de 12 cm și înălțimea de 8 cm. Să se calculeze cu o zecimală valorile funcțiilor trigonometrice ale unghiurilor de la bază.

7. Catetele unui triunghi dreptunghic sînt egale cu 4,372 cm și 5,645 cm. Să se determine cu aproximație de 0,001 valorile funcțiilor trigonometrice ale unghiurilor ascuțite ale triunghiului, unghiul drept fiind notat cu A.

8. Folosind definiția funcțiilor trigonometrice, să se arate că într-un triunghi dreptunghic ($\widehat{A}=90°$) există egalitatea:

$$\frac{\sin B}{1-\cos B}=\frac{1+\cos B}{\sin B}.$$

9. Folosind valorile funcțiilor trigonometrice ale unghiului de 45°, să se arate că într-un triunghi dreptunghic isoscel există relația:

$$\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 B}+\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2 C}=1.$$

10. Într-un triunghi dreptunghic ($\widehat{A}=90°$) să se demonstreze următoarea identitate: $\frac{1}{\sin \alpha}-\sin \alpha=\cos \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha$.

11. Într-un triunghi dreptunghic ($\widehat{A}=90°$), cu ajutorul definițiilor funcțiilor trigonometrice ca rapoarte,

să se demonstreze identitatea:

a) $\sin^2 B+\cos^2 B=1$.

b) Să se arate că este adevărată și pentru $\widehat{C}$.

c) Să se verifice cînd $B=30°, 45°, 60°$

12. Se poate ca un unghi să aibă cosinusul egal cu $\frac{2}{3}$, dar cu $\frac{3}{2}$?

13. Să se spună dacă sinusul și cosinusul unui unghi pot avea, respectiv, valorile $\frac{12}{13}$ și $\frac{5}{13}$.

14. Să se restrîngă expresiile:

a) $a \cos 0°+b \cos 90°+c \cdot \operatorname{ctg} 45°$.

b) $a^2\sin^2 90°+b^2\cos^2 0°$.

c) $a^2\sin 90°+2ab \cos 0°+b^2\operatorname{tg} 45°$.

15. Să se calculeze expresiile:

a) $a^2\sin 60°-2ab \cos 90°-b^2 \cos 30°$.

b) $6+8 \sin 45°+6 \cos 60°-7$.

c) $3+4 \sin^2 30°+12 \cos^2 45°$.

16. Să se calculeze:

a $(1+\operatorname{ctg}^2 60°)\cdot\cos^4 30°+3(\operatorname{ctg}^2 60°-1)$.

17. Să se arate că, pentru $x=30°$, $x=90°$, avem egalitatea: $\operatorname{ctg}\left(45°+\frac{x}{2}\right)=\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}$.

18. Să se construiască un unghi ascuțit, al cărui cosinus să fie $\frac{2}{5}$.

19. Să se construiască unghiul ascuțit știind că $\operatorname{tg} \alpha=\frac{3}{4}$.

20. Să se construiască grafic unghiurile date de:

a) $\sin a=\frac{6}{11}$.

b) $\cos b=\frac{2}{3}$.

c) $\operatorname{tg} x=3$.

d) $\operatorname{ctg} y=1{,}25$.

21. Dîndu-se $\sin \alpha=\frac{2}{5}$, să se spună care funcție trigonometrică și a cărui unghi are aceeași valoare?

22. Să se afle cu ajutorul tabelelor unghiul cînd se dă: *a)* $\sin \alpha = 0{,}978$; *b)* $\cos \alpha = 0{,}720$; *c)* $\operatorname{tg} \alpha = 1{,}015$; *d)* $\operatorname{ctg} \alpha = 6{,}905$.

23. Să se calculeze: sin 45°15'16", cos 44°44'44" și să se explice rezultatul.

24. Să se calculeze: sin 81°8", cos 50°18'5".

25. Să se calculeze: tg 30°2'45", tg 72°19'

26. Să se calculeze: ctg 59°57'15", ctg 28°6"

27. Se dă: $\sin \alpha = 0{,}6$; $\cos \alpha = 0{,}61$; $\operatorname{tg} \alpha = \frac{43}{63}$. Să se afle unghiul

28. Să se calculeze cu ajutorul tabelelor valoarea expresiei:

$$\frac{\sin 30°20' + \cos 78°10'}{2 \operatorname{tg} 62°}.$$

29. Să se rezolve triunghiul dreptunghic ABC, în care se cunoaște $b = 125{,}6$ m, $a + c = 247{,}2$ m.

30. Un funicular leagă două puncte cu o diferență de altitudine de 216 m. Unghiul de pantă este de 32°40'. Să se afle lungimea cablului funicularului.

31. Un romb are latura $a = 25$ cm și unghiul ascuțit de 45°. Să se calculeze diagonalele.

32. Un observator așezat la țărmul mării la 150 m înălțime vizează un vapor la 9° sub linia orizontului. Să se calculeze distanța în linie orizontală de la vapor la țărm.

Capitolul XVIII

Poligoane regulate

1. *Latura unui pătrat este egală cu a, raza cercului înscris aceluiași pătrat este egală cu r. Să se determine raza cercului circumscris.*

Rezolvare (fig. 72): în triunghiul OMA avem:

$$OA^2 = OM^2 + AM^2 \qquad R^2 = r^2 + \frac{a^2}{4}; \quad r = \frac{a}{2}$$

$$OA^2 = r^2 + \frac{a^2}{4} \qquad R = \sqrt{r^2 + \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{2a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

2. *Coarda comună a două cercuri secante este egală cu* a. *Ea este latura triunghiului echilateral înscris în unul din aceste cercuri și latura pătratului înscris în celălalt. Să se determine distanța dintre centrele cercurilor.*

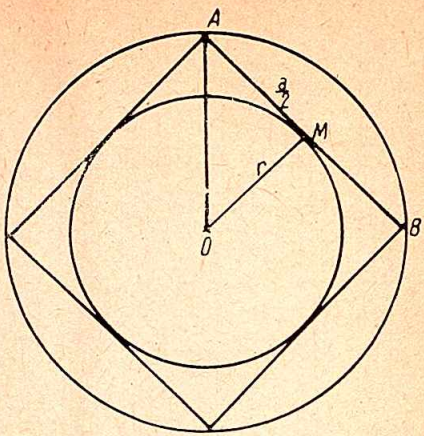


Fig. 72.

Rezolvare (fig. 73):

$O_1M=a_3$

$O_2M=a_4$

$O_1O_2=a_3+a_4$

$l_4=r\sqrt{2}=a$

$a_4=\frac{l_4}{2}=\frac{a}{2}$

$l_3=R_1\sqrt{3}=a$

$R_1=\frac{a\sqrt{3}}{3}$

$a_3=\frac{R_1}{2}=\frac{a\sqrt{3}}{6}$

$O_1O_2=\frac{a}{2}+\frac{a\sqrt{3}}{6}$

$O_1O_2=\frac{3a+a\sqrt{3}}{6}=\frac{a}{6}(3+\sqrt{3})$.

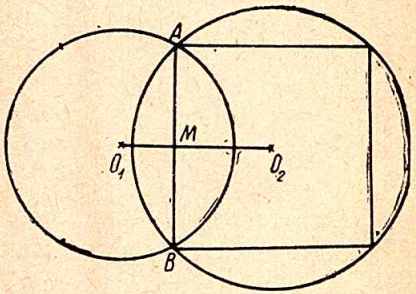


Fig. 73.

3. Într-un cerc cu raza de 4 cm se înscrie un hexagon regulat. Să se afle proiecțiile laturilor sale pe fiecare diagonală.

Rezolvare (fig. 74): pr. $AB_{(AC)}=AB'$; $R=4$ cm; $AB'=\frac{AC}{2}=\frac{l_3}{2}=$ $=\frac{R\sqrt{3}}{2}$; $AB'=\frac{1}{2}\cdot 4\sqrt{3}$; 1) $AB'=2\sqrt{3}$ cm, pr. $BC_{(AD)}=B''C'$; $B''C'=\frac{1}{2}AD$; $B''C'=\frac{1}{2}\cdot 8=4$ cm; 2) $B''C'=4$ cm; pr. $AB_{(AD)}=$ $=AB''=\frac{AO}{2}$, $AB''=\frac{1}{2}R=2$ cm, $AB''=2$ cm; pr. $DE_{(AE)}=0$ $AE\perp\!\!\!\perp E$ pr. $CD_{(AE)}=\frac{l_3}{2}=2\sqrt{3}$ cm.

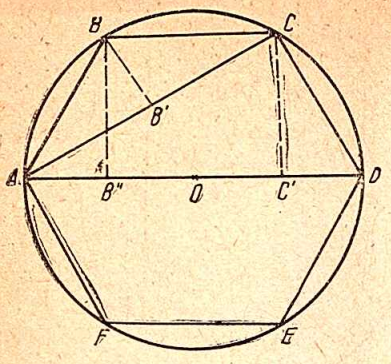


Fig. 74.

4. *Să se arate că raportul dintre lungimea unui cerc și perimetrul hexagonului regulat înscris este constant.*

Rezolvare: $\frac{L_c}{P_6}=\text{const.}$; $L_c=2\pi R$,

$P_6=6R$; $\frac{2\pi R}{6R}=\frac{\pi}{3}$ const.

5. *Dintr-o tablă de oțel se taie un cerc a cărui lungime este mai mare decît perimetrul hexagonului înscris în el cu* 28,28 cm. *Să se afle raza cercului.*

Rezolvare: $P_6=6\ R$; $L_c=2\pi R$; $L_c=P_6+28{,}28$; $2\pi R=6\ R+28{,}28$; $R(\pi-3)=14{,}14$; $R=\frac{14{,}14}{0{,}14}=101$ cm.

Probleme propuse

6. Un cerc are raza 10 m. Să se calculeze perimetrul pătratului înscris.

7. Să se arate că raportul dintre perimetrul pătratului și hexagonul regulat înscris în același cerc este constant.

8. Să se calculeze latura, apotema și înălțimea triunghiului echilateral înscris în cercul de rază 8 m.

9. Perimetrul triunghiului echilateral fiind 12 m, să se afle raza cercului circumscris.

10. Trebuie frezată o piesă pătrată cu latura de 32 mm. Care este cel mai mic diametru pe care trebuie să-l aibă o bucată de oțel potrivită pentru acest scop.

11. Unei bare cilindrice cu diametrul de 5 cm, i se dă forma de prismă triunghiulară regulată. Să se determine mărimea maximă pe care o poate avea latura triunghiului.

12. Să se înscrie într-un cerc dat (O) un triunghi echilateral, numai cu echerul.

13. Capătul unui șurub de la un robinet de gaz are forma de triunghi echilateral. Indicați valoarea maximă pe care o poate avea fiecare latură a triunghiului, dacă partea cilindrică a șurubului are un diametru de 2 cm.

14. Să se demonstreze că orice coardă perpendiculară pe rază în mijlocul ei este egală cu latura triunghiului echilateral înscris.

15. Să se arate că latura triunghiului echilateral este egală cu dublul apotemei hexagonului.

16. Diferența dintre raza cercului circumscris unui triunghi echilateral și raza cercului înscris este m. Să se determine latura triunghiului.

17. Latura unui poligon regulat este egală cu a, raza cercului circumscris aceluiași poligon este R. Să se determine raza cercului înscris.

18. Raza cercului circumscris unui poligon regulat este R, iar raza cercului înscris aceluiași poligon este r. Să se determine latura poligonului.

19. Unui cerc i se înscrie și totodată i se circumscrie un poligon regulat, cu 3 și 6 laturi. Să se afle raportul dintre laturile acestor două poligoane.

20. Latura unui triunghi echilateral înscris într-un cerc este b. Să se determine raza cercului și latura pătratului înscris.

21. Într-un cerc cu raza de 4 dm, se înscrie un triunghi echilateral, iar pe latura lui se construiește un pătrat. Să se determine raza cercului circumscris pătratului.

22. Unui cerc de rază R i se înscrie un triunghi echilateral, triunghiului i se înscrie un cerc, iar cercului un pătrat. Să se determine latura pătratului.

23. Unui triunghi echilateral cu latura a, i se circumscrie un cerc, cercului i se circumscrie un pătrat, iar pătratului un cerc. Să se determine raza cercului circumscris pătratului.

24. În planul de sistematizare al unui oraș este proiectată mărirea unei piețe, prin schimbarea formei sale pătrate, în una circulară, având lungimea sa egală cu perimetrul pătratului. Să se afle raza cercului, perimetrul vechii piețe fiind egal cu 200 m.

25. Coarda comună a două cercuri secante este de 12 cm. În cercul cel mare, această coardă este latura pătratului înscris, iar în cercul cel mic este latura triunghiului echilateral înscris. Să se calculeze razele celor două cercuri.

26. Într-un triunghi echilatera cu latura de 6 cm se înscrie un cerc și în acest cerc un alt triunghi echilateral. Să se calculeze latura acestui triunghi înscris.

27. Un cerc are lungimea 25,12 m. Să se afle raza.

28. Lungimea unui cerc fiind 31,4 m, se cere să se calculeze lungimea arcului de 80°.

29. Lungimea arcului de 15° este egală cu 4 m. Se cere să se calculeze raza cercului.

30. Să se arate că raportul dintre lungimea unui cerc și perimetrul pătratului înscris în cerc este constant.

31. Să se calculeze latura și apotema hexagonului regulat înscris în cercul de lungime 6,28 m.

32. Să se calculeze lungimea unui cerc, știind că raza sa este de: *a)* 10 m, *b)* 15 m, *c)* 35 cm.

33. Să se calculeze raza unui cerc, știind că lungimea sa este de: *a)* 1 m, *b)* 25 cm, *c)* 4,75 dm.

34. Să se calculeze lungimea unui arc de cerc de rază R, știind că unghiul la centru este de: *a)* 45°, *b)* 24°30′, *c)* 5°14′15″.

35. Circumferința unei roți de transmisie, cum arată figura 75, are o lungime de 540 mm, cureaua de transmisie este în contact cu roata de-a lungul unui arc de 200 mm. Să se calculeze unghiul corespunzător acestui arc.

36. Raza unei părți curbate în forma unui arc de cerc a unei căi ferate este de 1 200 m. Lungimea ei este de 450 m. Se cere să se afle cîte grade are arcul.

37. Lungimea unui cerc este de 25,12 dm. Să se calculeze raza cercului.

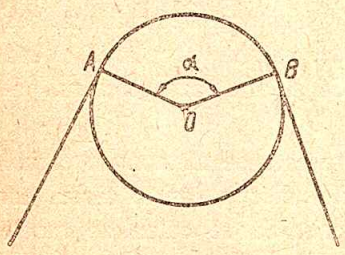


Fig. 75.

38. Se dă cercul cu raza de 6 cm. Să se afle lungimea arcelor de 144° și 270°.

39. Care este lungimea unui cerc cu diametrul de 3,25 m?

40. Lungimea cercului unei roți este 25 dm. Care este lungimea unei spițe dacă neglijăm diametrul butucului și grosimea obezii?

41. O cooperativă de tinichigerie are de executat o comandă de 2 200 de cerculeţe de fier, care servesc la fixarea burlanelor pe zidurile unei construcţii. Cunoscînd că diametrul unui cerculeţ este 12 cm şi că barele de fier din care se confecţionează au dimensiunea normală de 2 m, să se afle cîte bare au fost necesare.

42. Să se traseze un cerc cu raza de 6 cm, să se împartă în 24 de părţi egale şi să se afle lungimea unuia din arcele obţinute prin împărţire.

Capitolul XIX

Arii

1. *Un teren de formă dreptunghiulară, cu lungimea de* 900 m *şi lăţimea de* 400 m, *are aria egală cu un altul de formă pătrată. Se cere să se afle perimetrul pătratului*

Rezolvare (fig. 76):

aria $(ABCD)$ = aria $(A'B'C'D')$

$A = B \cdot l = 900 \cdot 400$

aria $(ABCD) = 360\,000$ m²

aria $(A'B'C'D') = L^2 = 360\,000$

$L^2 = 360\,000$

$L = \sqrt{360\,000} = 600$ m

perimetrul $= 4L$

perimetrul $= 4 \cdot 600 = 2\,400$ m.

Dreptunghiul şi pătratul sînt figuri echivalente pentru că au ariile egale.

2. *Să se arate că două triunghiuri care au baza* BC *comună şi vîrfurile* A, A' *situate pe o paralelă la* BC *au ariile egale.*

Rezolvare (fig. 77): Cele două triunghiuri ABC şi $A'BC$ au ariile egale, avînd baza comună şi înălţimile egale.

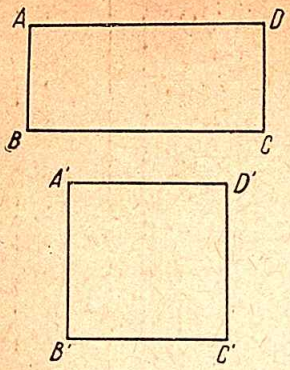


Fig. 76.

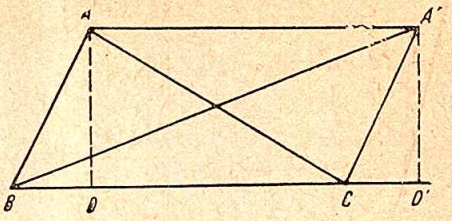


Fig. 77.

$AD \perp BC$
$A'D' \perp BD'$
$AA' \parallel BC$
$AD = A'D'$

$\text{aria } (ABC) = \frac{BC \cdot AD}{3}$

$\text{aria } (A'BC) = \frac{BC \cdot A'D'}{2} = \frac{BC \cdot AD}{2}$

$\text{aria } (ABC) = \text{aria } (A'BC)$

Datorită faptului că cele două triunghiuri au ariile egale, ele sînt figuri echivalente.

3. *Se dă un trapez* IMNP, *avînd bazele* MN, LP. *Paralela dusă prin* P *diagonalei* LN *întîlnește dreapta* MN *în* Q. *Să se arate că aria triunghiului* MPQ *este egală cu aria trapezului dat.*

Rezolvare (fig. 78): Scriem succesiv:

$\text{Aria } (MPQ) = \text{aria } (MNLP)$; $\text{aria } (MPQ) = \frac{MQ \cdot PP'}{2}$;

$\text{aria } (MNLP) = \frac{(MN + LP) \cdot MM'}{2}$; $MM' \perp MN$, $PP' = MM'$, $MM' \parallel P'P$,

$MP' \parallel M'P$. Deci $MQ = MN + NQ$.

În paralelogramul $NLPQ$ avem $NQ = LP$, $MQ = MN + LP$.

Înlocuind egalitățile de mai sus în aria triunghiului, rezultă că $\text{aria } (MPQ) = \frac{(MN + LP) \cdot MM'}{2}$.

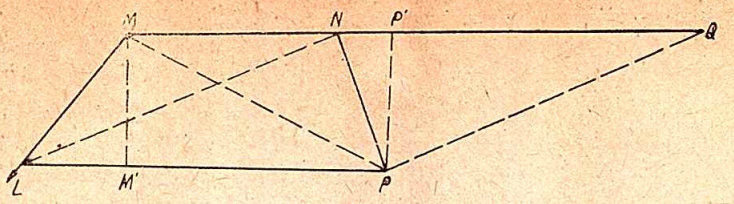


Fig. 78.

Comparînd rezultatul obținut cu aria trapezului $MNLP$, aria $(MNLP)$, se observă că cele două arii sînt egale. Totodată se poate spune că trapezul $MNLP$ și triunghiul MPQ sînt figuri echivalente.

4. *Un pătrat $ABCD$ are latura $AB=6$ cm. Pe latura AB luăm punctul E, pe BC punctul F, pe CD punctul G, iar pe DA punctul H,* astfel ca : $AE=BF=CG=DH=4$ cm.

Se cere :

a) *Să se arate că $EFGH$ este pătrat.*

b) *Să se afle perimetrul pătratului $EFGH$.*

c) *Să se calculeze aria acestui pătrat.*

Rezolvare (fig. 79) :

a) $\Delta HAE=\Delta EBF$

$AE=BF=4$ cm

$AH=EB=2$ cm.

Triunghiurile HAE și EBF sînt dreptunghice, au catetele egale, sînt egale, adică $HE=EF$.

$\widehat{AHE}=\widehat{BEF}$

$\widehat{AEH}=\widehat{EFB}$

$\widehat{AHE}+\widehat{HEA}=\widehat{BEF}+\widehat{BFE}=90°$

$\widehat{HEF}=180°-(\widehat{AEH}+\widehat{BEF})=180°-90°=90°$.

Dacă unghiul HEF este egal cu 90°, atunci laturile HE și EF sînt perpendiculare, iar patrulaterul $HEFG$, avînd laturile alăturate egale și unghiul cuprins între ele 90°, este un pătrat.

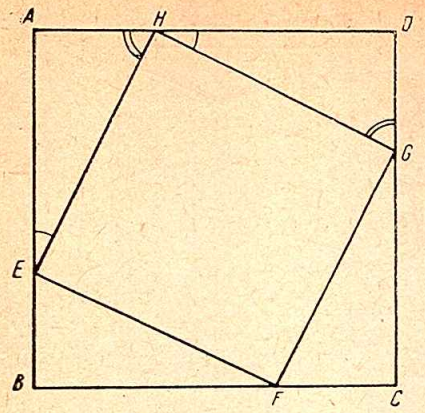


Fig. 79.

b) Pentru a calcula aria pătratului $HEFG$, aflăm mărimea laturii HE aplicînd teorema lui Pitagora în triunghiul $EAH \cdot HE^2 = AH^2 + AE^2$, $HE^2 = 4^2 + 2^2 = 20$. Aria $(HEFG) = HE^2 = 20$ cm^2.

c) Perimetrul pătratului $EFGH$ se află înmulțind cu 4 latura EF egală cu 6 cm. Perimetrul pătratului $EFGH = 4 \cdot 6 = 24$ cm.

5. *Se dă un triunghi ABC și un punct M în interiorul triunghiului. Fie A', B', C' picioarele perpendicularelor duse din M pe BC, CA, AB. Să se arate că:* $BC \cdot MA' + CA \cdot MB' + AB \cdot MC' = 2$ aria (ABC).

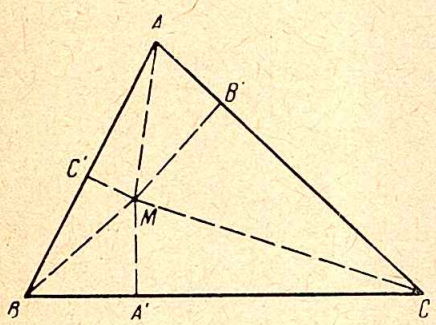


Fig. 80.

Rezolvare (fig. 80):

$$\text{aria } (BMC) = \frac{BC \cdot MA'}{2}$$

$$\text{aria } (BMA) = \frac{AB \cdot MC'}{2}$$

$$\text{aria } (AMC) = \frac{AC \cdot MB'}{2}$$

aria (AMC) = aria (BMC) + aria (BMA) + aria (AMC)

$$\text{aria } (ABC) = \frac{BC \cdot MA'}{2} + \frac{AB \cdot MC'}{2} + \frac{AC \cdot MB'}{2}$$

$$\text{aria } (ABC) = \frac{BC \cdot MA' + AB \cdot MC' + AC \cdot MB'}{2}$$

și $BC \cdot MA' + AB \cdot MC' + AC \cdot MB' = 2$ aria (ABC).

6. *Aria unui sector circular într-un cerc cu raza de* 4 cm *este* 12,56 cm^2. *Să se afle cîte grade are arcul sectorului.*

Rezolvare: aria (sector) $=\frac{\pi R^2 n}{360}$; $12{,}56=\frac{3{,}14\cdot 4^2 n}{360}=\frac{3{,}14\cdot 2n}{45}$; $n=$

$$=\frac{12{,}56\cdot 45}{3{,}14\cdot 2}=\frac{12{,}56\cdot 45}{6{,}28}=2\cdot 45=90^\circ$$

Arcul sectorului fiind egal cu 90°, sectorul este egal cu un sfert de cerc.

7. *Să se arate că raportul dintre aria unui cerc și aria pătratului înscris în el este constant.*

Rezolvare

Avem: aria (cerc) $=\pi R^2$; $l_4=R\sqrt{2}$; aria (pătrat) $=l^2=(R\sqrt{2})^2=2R^2$.

$$\frac{\text{aria (cerc)}}{\text{aria (pătrat)}}=\frac{\pi R^2}{2R^2}=\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\text{aria (cerc)}}{\text{aria (pătrat)}}\approx\frac{3{,}14}{2}=1{,}57$$

8. *Suma distanțelor de la un punct interior la laturile unui triunghi echilateral este constantă.*

Rezolvare (fig. 81):

$$\text{aria } (AMB)=\frac{AB\cdot MC'}{2}$$

$$\text{aria } (BMC)=\frac{BC\cdot MA'}{2}$$

$$\text{aria } (AMC)=\frac{AC\cdot MB'}{2}$$

$$\text{aria } (ABC)=\text{aria } (AMB)+\text{aria } (BMC)+\text{aria } (AMC)$$

$$\text{aria } (ABC)=\frac{AB\cdot MC'}{2}+\frac{BC\cdot MA'}{2}+\frac{AC\cdot MB'}{2}\ ;\ \text{aria } (ABC)=$$

$$=\frac{AB}{2}(MC'+MA'+MB')\ ;\ MC'+MA'+MB'=\frac{2\ \text{aria } (ABC)}{AB}.$$

Exprimăm aria triunghiului echilateral ABC și latura sa în funcție de raza cercului circumscris triunghiului.

$$\text{aria } (ABC)=\frac{3R^2\sqrt{3}}{4}\ ;$$

$$L_3=AB=R\sqrt{3}\ ;$$

$$\text{aria } (ABC)=2\cdot\frac{3R^2\sqrt{3}}{4}=\frac{3R^2\sqrt{3}}{2}$$

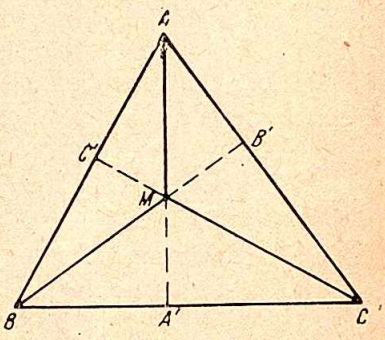


Fig. 81.

$$MC'+MB'+MA'=\frac{3R^2\sqrt{3}}{2R\sqrt{3}},\quad MC'+MA'+MB'=\frac{3R}{2}=\text{const.}$$

Raza are întotdeauna o valoare numerică bine determinată, deci raportul este constant cum s-a cerut.

Probleme propuse

9. O placă dreptunghiulară are aria de 93,75 dm², iar lungimea de 1,25 m. Să se afle lățimea.

10. Sala de spectacole a unui cămin cultural de formă dreptunghiulară cu lungimea de 24 m și lățimea de 15 m se parchetează cu parchet având forma de dreptunghi, cu dimensiunile de 25 cm și 8 cm. Se întreabă cîte bucăți de parchet sînt necesare pentru acoperirea întregii săli.

11. Dintr-o placă de tablă de formă dreptunghiulară cu dimensiunile de 0,54 m și 0,50 m, se taie dreptunghiuri cu baza de 4,5 cm și înălțimea de 2,5 cm. Să se afle cîte dreptunghiuri se taie din această tablă.

12. O placă dreptunghiulară este de 2 ori mai lungă decît lată. Perimetrul este de 4,5 m. Să se afle aria plăcii.

13. De cîte ori se mărește suprafața unui dreptunghi, dacă lungimea și lățimea lui se dublează.

14. Să se determine laturile unui dreptunghi, știind că raportul dintre ele este $\frac{4}{9}$, iar aria dreptunghiului este de 144 m².

15. Perimetrul unui dreptunghi este egal cu 74 dm, iar lungimea este cu 13 cm mai mare ca lățimea. Să se afle laturile și aria dreptunghiului.

16. Laturile unui dreptunghi sînt de 72 m și 8 m. Să se afle latura unui pătrat a cărui arie este egală cu aria dreptunghiului.

17. Diagonala unui dreptunghi este de 13 cm, iar una dintre laturi de 5 cm. Să se afle perimetrul și aria dreptunghiului.

18. Laturile a două parcele de pămînt în formă de pătrat sînt de 100 m și 150 m. Se cere să se determine perimetrul unei alte parcele de

pămînt în formă de dreptunghi, avînd lungimea egală cu suma laturilor celor două pătrate.

19. Să se determine aria unui pătrat, cunoscînd că diagonala sa este egală cu 1 dm.

20. Să se exprime aria pătratului înscris într-un cerc în funcţie de rază.

21. Să se arate de cîte ori este mai mare aria pătratului circumscris decît aria pătratului înscris aceluiaşi cerc.

22. De cîte ori se măreşte latura unui pătrat dacă suprafaţa sa se măreşte de 4 ori.

23. Cum se schimbă aria unui pătrat, atunci cînd latura lui se măreşte de 3 ori, se micşorează de 1,5 ori?

24. Cum trebuie să schimbăm latura unui pătrat pentru ca aria să se mărească de 4 ori, să se micşoreze de 25 de ori?

25. Aria planului unei parcele în formă de pătrat scara $\left(\frac{1}{10\,000}\right)$ este de 552,25 cm^2. Să se afle aria reală a locului.

26. Să se determine aria unui paralelogram, cunoscînd laturile lui şi unghiul format de ele: *a)* a, b, 30°, *b)* a, b, 45°, *c)* a, b, 60°.

27. Un paralelogram şi un dreptunghi au laturi egale. Să se afle unghiul ascuţit al paralelogramului, ştiind că aria sa este jumătate din aria dreptunghiului.

28. Un paralelogram are laturile de 8 cm şi 4 cm, iar unghiul ascuţit format de ele egal cu 30°. Să se afle latura unui paralelogram echivalent cu el, care are aceleaşi unghiuri şi baza de 6 cm.

29. Să se determine aria unui triunghi, ştiind că baza şi înălţimea sa sînt respectiv egale cu: 32 cm şi 18 cm; 5 dm şi 4 m.

30. Să se determine aria unui triunghi, cunoscînd laturile sale a şi b şi unghiul dintre ele: 1) 30°, 2) 45°, 3) 60°.

31. Două laturi ale unui triunghi sînt de 3 cm şi 8 cm. Poate aria lui să fie de: 1) 10 cm^2, 2) 15 cm^2, 3) 12 cm^2?

32. Să se calculeze aria unui triunghi dreptunghic, știind că ipotenuza sa este de 313 cm, iar o catetă de 312 cm.

33. Aria unui triunghi dreptunghic este de 720 cm², iar raportul dintre catete este $\frac{9}{40}$. Să se afle ipotenuza.

34. Să se determine aria unui triunghi dreptunghic isoscel, cunoscînd ipotenuza sa c.

35. Să se determine aria unui triunghi isoscel, știind că baza și fiecare din laturile egale sînt respectiv de: 1) 56 cm și 1 m; 2) b și c; 3) 20 cm și 11 cm.

36. Să se calculeze aria unui triunghi dreptunghic, știind că înălțimea sa împarte ipotenuza în două părți: de 32 cm și 18 cm.

37. Să se calculeze aria unui triunghi, știind că înălțimea sa este 36 cm, iar cele două laturi care pleacă din același vîrf sînt de 85 cm și 60 cm.

38. Un triunghi echilateral este tăiat prin paralele duse la laturi la o treime din înălțime, socotită de la vîrf. Figura obținută este un hexagon regulat. Să se afle aria acestui hexagon, știind că latura triunghiului dat este 120 mm.

39. Să se afle aria unui romb, știind că diagonalele sale sînt de 72 cm și 40 cm.

40. Latura unui romb este egală cu 10 cm și diagonala mică este egală cu 12 cm. Să se afle aria rombului.

41. Aria unui romb este egală cu 30 000 cm², iar diagonala mică este de 200 cm. Să se afle latura rombului.

42. Acul magnetic al unei busole este în formă de romb. El are diagonalele de 40 mm și 12 mm. Să se afle aria și perimetrul rombului.

43. Bazele unui trapez sînt de 35 cm și 29 cm, iar aria sa este de 256 cm². Să se afle înălțimea trapezului.

44. Înălțimea unui trapez este de 8 cm, iar aria sa este de 2 dm². Să se afle linia mijlocie a trapezului.

45. Aria unui trapez este 144 cm², raportul bazelor este $\frac{4}{5}$, iar înălțimea este 16 cm. Să se afle bazele.

46. Un trapez cu aria de 2 400 m² are baza mare de 70 m și baza mică de 50 m. Să se afle înălțimea trapezului.

47. O placă în formă de trapez are aria de 2,55 m² și înălțimea de 85 cm. Baza mare fiind de 3 ori mai mare decît baza mică, să se afle bazele trapezului.

48. Bazele unui trapez isoscel sînt de 51 cm și 69 cm, iar fiecare din laturile egale este de 41 cm. Să se afle aria trapezului.

49. Să se calculeze aria unui trapez isoscel, știind că bazele sînt de 42 cm și 54 cm, iar unghiul de la baza mai mare este de 45°.

50. Să se afle aria unui trapez isoscel, știind că bazele sale sînt de 12 cm, și 20 cm, iar diagonalele sînt perpendiculare una pe alta.

51. În figura 82 este schițat planul clădirii unui teatru. Să se calculeze mărimea suprafeței clădite, dimensiunile fiind date în metri.

52. O parcelă din terenul unei cooperative agricole de producție are forma din figura 83, unde dimensiunile sînt date în decametri. Porțiunea din interior în formă de triunghi este cultivată cu pomi fructiferi, iar restul cu cereale. Să se calculeze mărimea suprafeței cultivate cu cereale și mărimea suprafeței plantate cu pomi fructiferi.

53. O zonă verde are forma de trapez, precum se vede în figura 84. Spațiile haşurate reprezintă straturile de iarbă. Să se calculeze aria terenului care rămîne pentru plimbare și jocul copiilor, dacă dimensiunile sînt exprimate în metri.

54. Să se calculeze aria unui cerc cu raza de: 1) 10 m, 2) 4 dm, 3) 2,6 cm, se va lua $\pi = 3{,}14$.

55. Să se calculeze aria cercului pistonului unei pompe de aer, știind că diametrul lui este 10 cm.

56. Să se calculeze aria unui sector, știind că raza sa este r, iar arcul are: 1) 67°30′; 2) 15°45′.

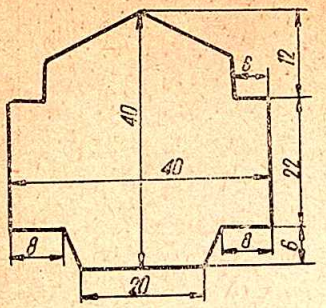


Fig. 82.

57. Un romb cu diagonala mare de 72 m are laturile tangente la un cerc cu raza de 21,6 m. Se cere să se calculeze diagonala mică și latura rombului.

58. În cercul O cu raza de 10 m se înscrie trapezul $ABCD$, care are baza mare egală cu latura triunghiului echilateral înscris și baza mică egală cu latura hexagonului înscris în același cerc. Să se afle aria trapezului.

59. Care este aria unei secțiuni drepte într-o bară rotundă cu diametrul de 8,60 cm.

60. Să se afle aria unui cerc a cărui lungime este de 51,5224 dm.

61. Care va fi raza unui cerc a cărui arie este egală cu aria unui triunghi cu baza de 23,30 m și înălțimea de 19,80 m?

62. Aria unui sector circular corespunzător unui unghi la centru de 20° este 25,12 dm². Să se afle raza cercului din care face parte.

63. Să se afle aria cuprinsă între 3 cercuri egale tangente exterioare două cîte două, cînd raza este egală cu 2 cm.

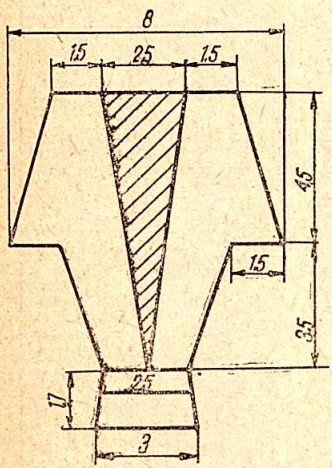


Fig. 83.

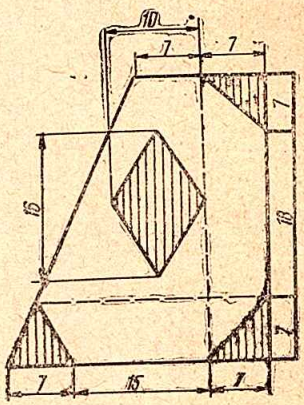


Fig. 84.

64. Lungimea unui cerc este de 75,36 dm. Se taie din el un sector corespunzător unui unghi la centru de 27°. Să se afle aria porțiunii rămase.

65. Într-un cerc cu raza de 5 cm se duc două coarde paralele de aceeași parte a centrului cercului, una dintre ele fiind egală cu latura triunghiului echilateral înscris, iar cealaltă cu latura pătratului înscris. Să se afle aria trapezului cuprins între ele.

66. Să se arate că raportul dintre aria cercului și aria hexagonului regulat înscris este constant.

67. Să se arate că raportul dintre aria unui cerc și aria triunghiului echilateral înscris este constantă.

68. Să se arate că raportul dintre aria pătratului și aria hexagonului regulat înscris în același cerc este constant.

69. Să se arate că raportul dintre aria pătratului și aria triunghiului echilateral înscris în același cerc este constant.

Capitolul XX

Introducere în geometria în spațiu

1. Cîte plane se pot duce printr-un punct? Prin două puncte? Prin trei puncte? Să se dea exemple.

2. Cîte plane se pot duce printr-o dreaptă? Dar printr-o dreaptă și un punct exterior ei?

3. O parte din acoperișul unei case are forma indicată în figura 85. Pe bîrnele AB, AC se bat scînduri. Să se arate dacă:

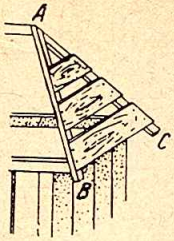


Fig. 85.

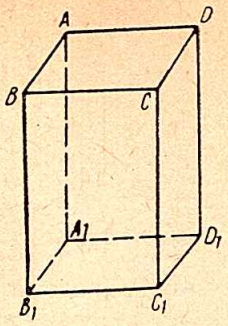


Fig. 86.

a) Această parte a acoperișului reprezintă un plan.

b) În ce mod este determinat acest plan.

c) Să se dea și alte exemple de determinare a planului.

4. În figura 86 este reprezentat un corp geometric. Să se arate dacă:

a) Dreptele DB_1, D_1C, BD_1, AC_1 sînt concurente sau nu.

b) Perechile de drepte AD și B_1C_1, DC și DB_1, BC și AA_1 determină sau nu un plan.

5. Să se arate pe un obiect cu forma unui corp geometric (o cutie de chibrituri, călimară etc.), exemple de drepte paralele, de drepte concurente și de drepte oarecare.

6. Să se dea exemple de pozițiile relative a două drepte din spațiu.

7. Luați două vergele. Așezați-le concurente, apoi paralele. Figura formată reprezintă un plan și de ce? Dați și alte exemple.

8. Se dau un plan și o dreaptă exterioară paralelă cu planul. Să se arate cîte plane se formează și să se spună dacă sînt concurente.

9. Se dau două drepte oarecare în spațiu și un punct neașezat pe nici una din ele. Să se arate că planele formate de punct și de fiecare dreaptă sînt concurente.

10. Se dau trei drepte (D_1), (D_2), (D_3), concurente două cîte două. Să se arate cîte plane se pot determina.

11. Se dau punctele A, B, C necoliniare și dreapta (D) oarecare din spațiu. Să se arate că planele determinate de dreapta (D) și de fiecare dintre punctele A, B, C taie planul ABC după trei drepte concurente.

12. Se dau patru puncte A, B, C, D, care nu sînt situate în același plan. Să se arate cîte plane se pot duce care să conțină cîte trei din aceste puncte.

13. După cîte drepte se intersectează planele din problema precedentă.

14. Locul punctelor din spațiu egal depărtate de două puncte date A și B este un plan. Folosind proprietatea mediatoarei unui segment de dreaptă, să se arate proprietatea punctelor care formează acest plan.

Capitolul XXI

Poziții relative ale elementelor fundamentale

1. *Se dă un plan* P, *reprezentat prin paralelogramul* ABDE, *și un plan* Q, *reprezentat prin triunghiul dreptunghic* ABC (*cu unghiul* A $=90°$), *cum arată figura 87. Știind că* AB $=36$ cm, AC $=27$ cm, CF $=9$ cm *și* $CG = 15$ cm, *să se demonstreze că dreapta* FG *este paralelă cu planul* P.

Rezolvare: Planele P și Q se intersectează după dreapta AB, care se află atît în planul P cît și în planul Q. Dreapta FG, aflîndu-se în planul Q, va fi paralelă cu planul P, dacă este paralelă cu o dreaptă din acest plan. Dreapta FG este paralelă cu dreapta AB cînd triunghiurile ABC, FGC sînt asemenea.

În triunghiul dreptunghic ABC avem :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

$$BC^2 = 36^2 + 27^2 = 2\,025$$

$$BC = \sqrt{2\,025} = 45 \text{ cm}.$$

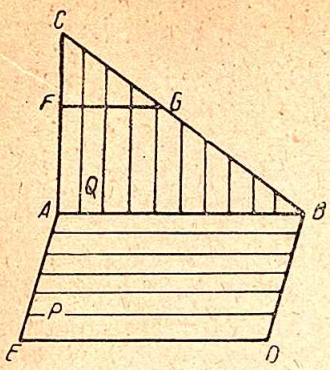


Fig. 87.

Putem scrie :

$$\frac{CF}{CA}=\frac{CG}{CB},\ \frac{9}{27}=\frac{15}{45}.$$

Egalitatea rapoartelor de asemănare arată că laturile sînt proporționale și triunghiurile CFG, ABC sînt asemenea. Conform reciprocei teoremei lui Tales, $FG \parallel AB$ și deci $FG \parallel P$.

2. *Se dă un romb* ABCD *situat într-un plan* P, *un alt plan* P_1 *paralel cu planul* P *și un punct* M *situat deasupra planului* P_1 *cum se arată în figura* 88. *Dreptele* MA, MB, MC, MD *intersectează planul* P_1 *în punctele* A_1, B_1, C_1, D_1. *Să se determine ce formă are patrulaterul* $A_1B_1C_1D_1$ *din planul* P_1.

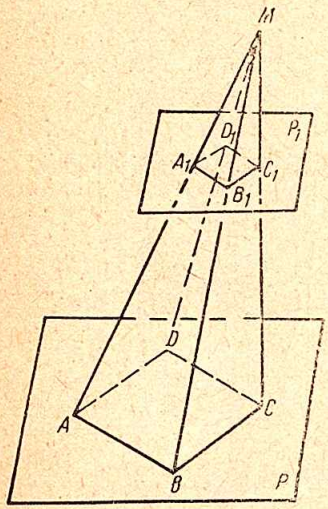


Fig. 88.

Rezolvare : Planele paralele P și P_1 intersectate de planul MAB determină $A_1B_1 \parallel AB$ și la fel planul MBC determină prin intersecția cu planele P_1 și P dreptele $B_1C_1 \parallel BC$. Ținînd seama de acestea, rezultă :

$\triangle MA_1B_1 \sim \triangle MAB$ și $\triangle MB_1C_1 \sim \triangle MBC$

Putem scrie :

$$\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{MB_1}{MB}$$

$$\frac{B_1C_1}{BC}=\frac{MB_1}{MB}$$

$$\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{B_1C_1}{BC}.$$

Patrulaterul $ABCD$ este un romb, unde $AB=BC$. Din ultima egalitate rezultă că $A_1B_1=B_1C_1$. Procedăm la fel și determinăm : $A_1B_1=B_1C_1=C_1D_1=D_1A_1$,

adică $A_1B_1C_1D_1$ este de asemenea un romb.

3. *În vîrful* D *al dreptunghiului* ABCD, *care are laturile* AB = 9 cm *și* BC = 8 cm, *se duce perpendiculara* DE = 12 cm *pe planul dreptunghiului. Să se determine distanța dintre punctul* E *și vîrful dreptunghiului, cum arată figura* 89.

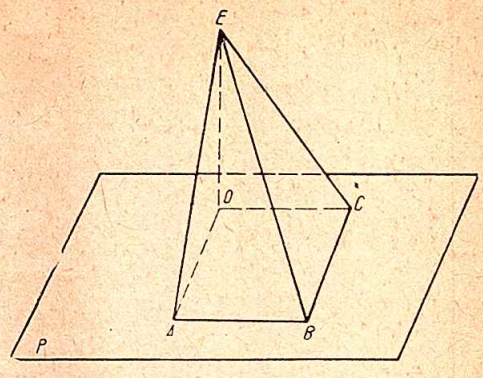


Fig. 89.

Rezolvare: Dreapta DE fiind perpendiculară pe planul dreptunghiului, unghiurile pe care le face dreapta DE respectiv cu dreptele DA, DB, DC sînt drepte și triunghiurile EDA, EDB, EDC sînt dreptunghice, avînd unghiul drept în D. Putem calcula lungimile segmentelor EA, EB, EC, cerute de problemă.

În triunghiul dreptunghic EDA avem:

$$EA^2 = ED^2 + DA^2 = 208$$

$$EA = \sqrt{208} = 4\sqrt{13} \text{ cm.}$$

În triunghiul dreptunghic EDB avem:

$$EB^2 = ED^2 + DB^2$$

DB este diagonala dreptunghiului $ABCD$.

$$DB^2 = AB^2 + AD^2 = 145$$

$$EB^2 = 144 + 145 = 289$$

$$EB = \sqrt{289} = 17 \text{ cm.}$$

În triunghiul dreptunghic EDC avem:

$$EC^2 = ED^2 + DC^2 = 225$$

$EC = \sqrt{225} = 15$ cm distanța cerută.

4. *Dintr-un punct* A *sînt duse în planul* P *perpendiculara* $OA = 1$ *și două oblice egale* AB, AC, *care formează cu perpendiculara* $\widehat{BAO} = \widehat{CAO} = 60°$, *iar între ele* $\widehat{CAB} = 90°$ *Să se afle distanța* BC *dintre picioarele oblicelor.*

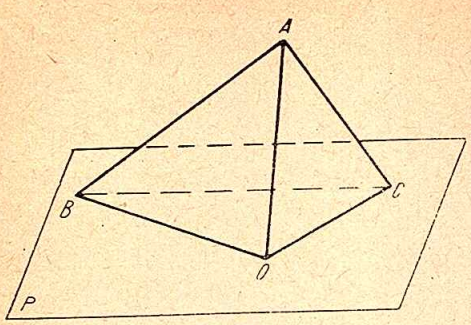


Fig. 90.

Rezolvare: (fig. 90). Se formează triunghiurile dreptunghice AOC și AOB, din care se află AC și AB. În triunghiul AOC avem:

$$AC = \frac{AO}{\cos 60°} = \frac{1}{\frac{1}{2}} =$$

$$= 2, \quad AC = AB = 2.$$

În triunghiul dreptunghic CAB avem:

$$CB^2 = AC^2 + AB^2 = 8$$

$$CB = 2\sqrt{2}.$$

5. *Se dă triunghiul* ABC *și dreptunghiul* BCDE *care se intersectează astfel încît* AC $\perp$ P. *Să se demonstreze că dreapta* AD *este perpendiculară pe dreapta* DE.

Rezolvare (fig. 91): Din construcție rezultă că dreapta AC este perpendiculară pe planul P și deci pe dreptele BC și CD din acest plan, adică: $AC \perp BC$ și $AC \perp CD$. În planul P, dreapta CD este perpendiculară pe dreapta DE, fiind laturi ale dreptunghiului. Dreapta AC, fiind perpendiculară pe planul P, este perpendiculară și pe dreapta DE din același plan. Dreapta AD, fiind conținută în planul determinat de dreptele AC și CD, conform teoremei celor trei perpendiculare este perpendiculară pe dreapta DE, cum s-a cerut.

6. *Pe capetele de sus a doi stîlpi verticali depărtați unul de altul cu* 3,4 m *se reazemă cu capetele o bară. Unul din stîlpi are înălțimea* 5,8 m, *iar altul* 3,9 m. *Să se afle lungimea barei.*

Rezolvare (fig. 92):

$$EC = AB = 3{,}4 \text{ m}.$$

$$CB = 3{,}9 \text{ m}.$$

$$AD = 5{,}8 \text{ m}$$

$$DE = AD - AE = 5{,}8 - 3{,}9 = 1{,}9 \text{ m}$$

În triunghiul DEC avem:

$$DC^2 = DE^2 + EC^2 = 1{,}9^2 + 3{,}4^2 = 15{,}17$$

$$DC = \sqrt{15{,}17} \approx 3{,}9 \text{ m}$$

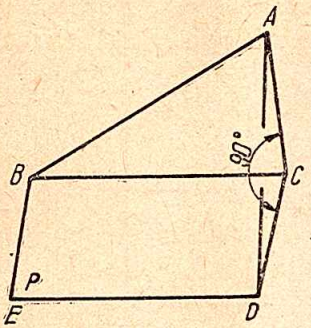


Fig. 91.

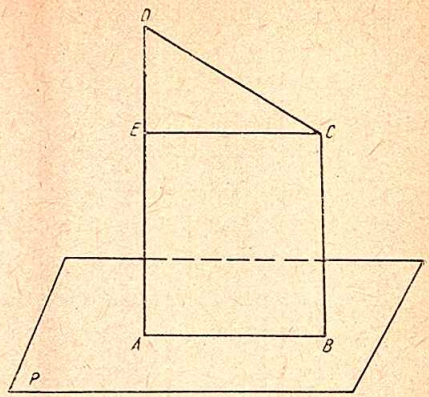


Fig. 92.

7. *Se dă un plan* P, *un punct* A *exterior planului și un punct* B *situat în plan. Punctul C împarte segmentul* AB *în raportul* $\frac{3}{7}$. *Fie* CD = 12 cm *paralel cu planul* P. *Dreapta AD întîlnește planul* P *în punctul E. Să se afle distanța dintre punctele* B, E.

Rezolvare (fig. 93): Aplicînd asemănarea în triunghiurile *ACD* și *ABE*, avem:

$$\frac{AC}{AB} = \frac{CD}{BE}$$

$$\frac{3}{7} = \frac{12}{BE}$$

$$BE = \frac{7 \cdot 12}{3} = 28 \text{ cm}.$$

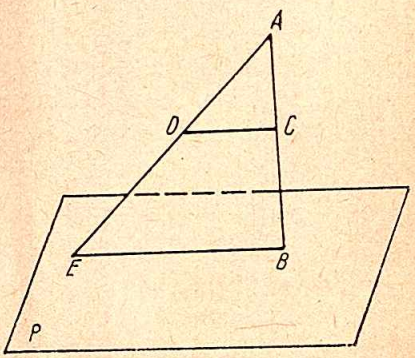


Fig. 93.

Probleme propuse

8. Clasa sau camera de lucru a unui elev cu cei 4 pereți, podeaua și tavanul reprezintă 6 plane. Alegîndu-se unul din aceste plane, să se arate:

a) Toate planele paralele cu el.

b) Toate planele concurente cu el.

9. Două plane pot avea un singur punct comun ?

Ce putem spune despre două plane care au un punct comun ?

Cîte alte puncte comune mai au ?

Ce linie formează aceste puncte ?

10. Două plane se taie după o dreaptă d. O dreaptă d' este paralelă cu ambele plane. Ce poziție are dreapta d' față de dreapta d ?

11. Fie un plan reprezentat prin paralelogramul $ABCD$. Prin punctele A, B, C, D, se duc segmentele egale și paralele AA_1, BB_1, CC_1, DD_1, în afara planului $ABCD$, adică $AA_1=BB_1=CC_1=DD_1$. Să se demonstreze că planele reprezentate prin paralelogramele $ABCD$, $A_1B_1C_1D_1$ sînt paralele.

12. Se dă în spațiu un punct A și o dreaptă oarecare d. Să se ducă prin punctul A o dreaptă paralelă cu dreapta d.

13. Se dă un punct A nesituat într-un plan dat P. Prin punctul A se cere să se ducă un plan paralel cu planul P.

14. Se dau două drepte d_1 și d_2. Să se ducă prin dreapta d_1 un plan paralel cu dreapta d_2. Se va analiza cazul cînd dreptele sînt oarecare sau paralele.

15. Din centrul unui cerc, de rază 18 cm, se ridică o perpendiculară pe planul cercului. Să se determine distanța de la extremitatea perpendicularei la circumferința cercului, dacă lungimea perpendicularei este egală cu 80 cm.

16. Dintr-un punct exterior planului se duce o oblică la plan de lungime 20 cm, formînd cu planul un unghi de 45°. Să se determine distanța punctului la plan.

17. Din punctul A situat la distanța de 12 cm de planul P, se duce oblica AB egală cu 37 cm. Să se determine mărimea proiecției lui AB pe planul P.

18. Dintr-un punct se duce pe plan o perpendiculară de lungimea a și o oblică. Unghiul pe care îl formează perpendiculara cu oblica este de 45°. Să se afle mărimea oblicei.

19. Dintr-un punct dat A, situat la distanța de 6 cm de plan, se duce oblica AB, a cărei lungime are 10 cm. Să se determine proiecția BC a oblicei pe plan.

20. Din centrul unui cerc se duce o perpendiculară pe planul cercului. Să se determine distanța de la extremitatea acestei perpendiculare la circumferință, dacă lungimea perpendicularei este egală cu 4 cm, iar aria suprafeței cercului este 28,26 cm².

21. Două plane perpendiculare P_1 și P_2 se intersectează după o dreaptă AB. În planul P_2 se ia o dreaptă CD paralelă cu dreapta AB, situată la distanța de 60 cm de aceasta. În planul P_1 se ia punctul E la distanța de 91 cm de dreapta AB (fig. 94). Se cere să se determine distanța punctului E față de dreapta CD.

22. Se dă un romb $ABCD$, ale cărui diagonale sînt respectiv egale cu 60 cm și 80 cm. În afara rombului, pe perpendiculara dusă în punctul de intersecție al diagonalelor la distanța de 45 cm se ia un punct M. Să se determine distanțele acestui punct la vîrfurile rombului.

23. Se dă un unghi diedru de 45°. Pe una din fețe se ia un punct care se găsește la distanța de 25 cm față de cealaltă. Să se afle distanța acestui punct la muchia diedrului (fig. 95).

24. Pe fața unui unghi diedru se iau două puncte, distanțele lor la cealaltă față sînt respectiv de 10 cm și 16 cm. Distanța celui de-al doilea

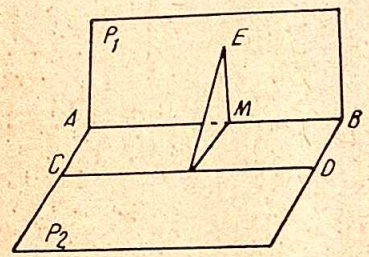


Fig. 94.

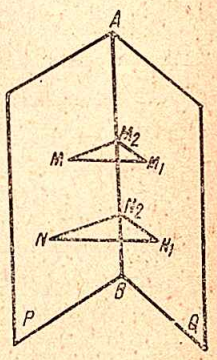


Fig. 95.

punct la muchia diedrului este 32 cm. Să se determine distanța primului punct la muchia diedrului.

25. Avem un segment de dreaptă $AB=5$ cm și un plan P. Distanțele de la capetele segmentului pînă la plan sînt : $AA'=7$ cm, $BB'=10$ cm. Se cere lungimea proiecției segmentului AB pe planul P.

26. Avem un pătrat $ABCD$ cu diagonala $BD=10$ cm; îl îndoim după diagonala BD, astfel ca planul triunghiului BCD să fie perpendicular pe planul triunghiului ABD. Se cere distanța AC.

27. Avem un unghi diedru de 45°. Pe una din fețele diedrului luăm un punct A, situat la distanța de 10 cm de muchia diedrului. La ce distanță de muchie se află proiecția lui A pe cealaltă față a diedrului.

28. Se dă un plan P și M un punct la distanța $d=4$ unități de plan. Se duc din M oblicele MA, MB, MC, care fac cu perpendiculara MO pe plan respectiv unghiuri de 30°, 45°, 60°. Să se afle lungimea oblicelor.

29. Dintr-un punct se duc pe plan două oblice, de 20 cm și 15 cm. Proiecția pe plan a primei oblice este 16 cm. Să se afle proiecția celeilalte oblice.

30. Dintr-un punct oarecare se duc pe un plan o perpendiculară și o oblică, respectiv de 6 cm și 9 cm. Să se afle proiecția perpendicularei pe oblică.

31. A, B fiind puncte exterioare planului P, iar AC, BD perpendiculare pe plan, dacă $AC=3$ m, $BD=2$ m și $CD=24$ dm, să se afle distanța dintre punctele A, B.

32. Un fir telefonic lung de 15 m, întins de la casă la un stîlp, este fixat pe un zid la o înălțime de 20 m de suprafața terenului, iar pe stîlp la 8 m de sol. Să se afle distanța dintre stîlp și casă.

33. Un segment de dreaptă de 10 cm are capetele sale depărtate de un plan la distanțele de 9 cm și 3 cm. Să se afle lungimea proiecției segmentului pe plan.

34. Fie $AB=a$ un segment de dreaptă paralel cu un plan și A_1B_1 proiecția sa pe plan. Știind că BA_1 face cu planul un unghi de 60°, să se afle lungimea segmentului BA_1.

35. Din punctele A, B ale planului P sînt duse în afara planului segmentele paralele $AC=8$ cm și $BD=6$ cm. Dreapta CD intersectează planul P în punctul E. Știind că $AB=4$ cm, să se afle distanța BE.

36. Dintr-un punct luat în interiorul unui unghi diedru este dusă o perpendiculară pe muchie. Ea formează cu feţele unghiuri de 38°24′ şi 71°36′. Să se calculeze mărimea unghiului diedru.

37. În interiorul unui unghi diedru de 60° este luat un punct a cărui depărtare la cele două feţe este a. Să se afle distanţa de la punct la muchie.

38. Se dă un diedru drept, A şi B puncte pe muchia diedrului, AC şi BD perpendiculare pe muchie duse în feţe diferite. Să se afle distanţa CD, dacă $AB=6$ cm, $AC=3$ cm şi $BD=2$ cm.

Capitolul XXII

Proiecţii

1. *Dintr-un punct dat sînt duse pe un plan o oblică de* 2 cm *şi perpendiculara de* $\sqrt{3}$ cm. *Să se afle mărimea unghiului făcut de oblică cu planul.*

Rezolvare: Prin unghiul făcut de oblica AB cu planul P, înţelegem unghiul făcut de oblică cu proiecţia sa din plan. În triunghiul AOB avem: $\sin B=\frac{AO}{AB}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Unghiul $\widehat{B}=60°$.

2. *Un segment de dreaptă* AB *de* 3 cm *este paralel cu un plan. Fie* A_1B_1 *proiecţia sa pe plan şi* BA_1 *egal cu dublul segmentului. Să se afle unghiul pe care* BA_1 *îl face cu planul dat.*

Rezolvare: (fig. 96): Proiecţia unui segment de dreaptă paralel cu un plan este egală cu segmentul. Deci, A_1B_1 este egal cu 3 cm, iar $BA_1=2AB$ sau $BA_1=6$ cm.

Unghiul făcut de BA_1 cu planul P, este unghiul făcut de BA_1 cu proiecţia sa din plan, care este egală cu segmentul AB.

Avem: $\cos BA_1B_1=\frac{A_1B_1}{A_1B}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

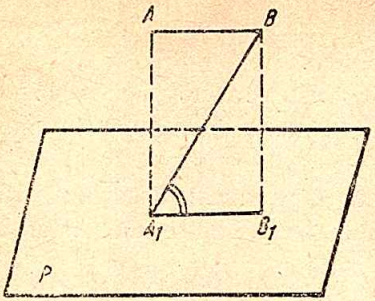


Fig. 96.

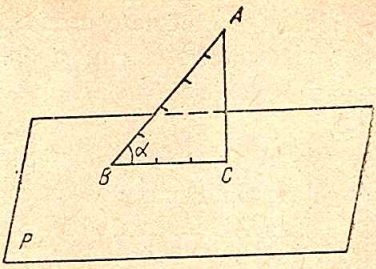


Fig. 97.

Unghiul BA_1B_1 este de 60°.

3. *Un segment* AB *se proiectează pe un plan* P *după un segment egal cu* $\frac{3}{5}$ *din el. Să se calculeze unghiul format de segmentul* AB *cu planul* P.

Rezolvare (fig. 97): Unghiul făcut de segment cu planul se află prin cosinusul unghiului α format de segment cu proiecția sa. Cu ajutorul valorii naturale a funcției trigonometrice considerate se află mărimea unghiului α. În triunghiul ACB avem: $\cos\alpha = \frac{BC}{AB}$, $\cos\alpha = \frac{\frac{3}{5}AB}{AB}$, $\cos\alpha = \frac{3}{5} = 0{,}6$.

Unghiul α este egal cu 59°.

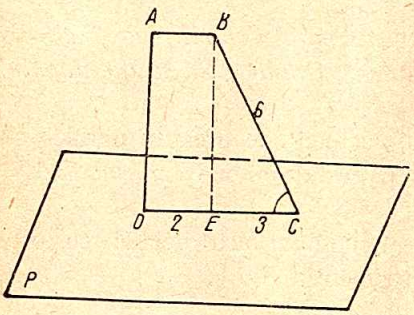


Fig. 98.

4. *Un trapez dreptunghic are bazele și latura oblică exprimate în centimetri prin numerele* 2, 5, 6. *Acest trapez are baza mare conținută într-un plan. Să se afle unghiul pe care îl face latura oblică cu planul (fig.* 98).

Rezolvare: Se formează triunghiul dreptunghic BEC, în care B este ipotenuză și egală cu 6 cm, iar EC este egală cu 3 cm, reprezentînd

diferența bazelor. În triunghiul BEC avem : $\cos C = \frac{EC}{BC}$, $\cos C = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. Unghiul C are 60°.

Probleme propuse

5. Să se afle proiecția a 3 puncte coliniare pe un plan și să se arate că proiecțiile lor sînt de asemenea 3 puncte coliniare.

6. Trei puncte coliniare A, B, C se proiectează în a, b, c pe planul P. Să se arate că $\frac{AB}{BC} = \frac{ab}{bc}$.

7. Trei puncte necoliniare A, B, C se proiectează pe planul Q în A_1, B_1, C_1. Să se spună cum sînt depărtările la planul Q.

8. Capetele unui segment de dreaptă AB are depărtările la planul R pe care se proiectează segmentul egale cu a și b. Să se compare segmentul proiecției $A'B'$ din plan cu segmentul dat.

9. Să se arate că două drepte paralele (D) și (D') au ca proiecții pe un plan în general două drepte paralele (d) și (d').

10. Să se demonstreze că proiecția pe un plan P a unui unghi drept AOB, în care latura AO este paralelă cu planul P, este tot un unghi drept.

11. Să se demonstreze că, dacă proiecția unui unghi drept AOB din spațiu pe un plan P este un unghi drept aob, atunci una din laturile OA, OB ale unghiului drept este paralelă cu planul.

12. Lungimea unei oblice duse pe un plan este egală cu a. Să se afle proiecția acestei oblice în cazul cînd oblica formează cu planul un unghi egal cu : 1) 30° ; 2) 45° ; 3) 60°.

13. Depărtarea unui punct la un plan este h. Să se afle lungimea oblicelor duse din acest punct la plan, cînd formează cu planul unghiuri de : 1) 30° ; 2) 45° ; 3) 60°.

14. Un segment de dreaptă $AB = 10$ cm are extremitatea B conținută într-un plan P, iar extremitatea A este depărtată de plan cu 5 cm. Să se afle unghiul pe care-l face segmentul AB cu planul P.

15. Ce unghi face un segment de dreaptă cu un plan dacă proiecția sa pe plan este jumătate din segmentul dat.

16. Depărtarea unui punct la un plan este b. Din acest punct se duc două oblice care fac cu planul unghiuri de 45°. Să se spună cum sînt oblicele și de ce.

17. Depărtarea unui punct la un plan este a. Din acest punct se duc două oblice care fac cu planul unghiuri de 45° și 30°. Să se afle și să se compare proiecțiile acestor oblice.

18. Se dă planul P și dreapta AB în plan. Din B se duc de aceeași parte a planului dreptele AC, BD perpendiculare pe AB, făcînd cu planul unghiuri de 50° și 15°. Să se afle unghiul CBD.

19. Dacă o catetă a unui triunghi dreptunghic isoscel se află pe un plan P, iar altă catetă face cu planul P un unghi de 45°, să se arate că ipotenuza formează cu P un unghi de 30°.

20. O oblică AB face cu un plan P un unghi de 45°, iar proiecția ei pe plan face cu o dreaptă AC a planului un unghi de 45°. Să se arate că unghiul BAC are 60°.

Capitolul XXIII

Poliedre

1. *O masă se sprijină pe* 3 *picioare egale, avînd forma unor prisme drepte, cu bazele triunghiuri echilaterale. Latura bazei este de* 5 cm, *iar înălțimea piciorului de* 6 dm. *Să se afle volumul lemnului întrebuințat la construcția picioarelor.*

Rezolvare: Se află volumul unui picior în formă de prismă dreaptă și se mărește de 3 ori.

Avem :

$$A_3 = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3\cdot\left(\frac{5}{\sqrt{3}}\right)^2\cdot\sqrt{3}}{4} =$$

$$= \frac{25\sqrt{3}}{4};\ i = 6 \text{ dm} = 60 \text{ cm}$$

$$= V\frac{25\sqrt{3}}{4}\cdot 60 = 25\sqrt{3}\cdot 15 = 375\sqrt{3}$$

volumul lemnului este egal cu $3V = 1912{,}5$ cm^3.

2. *Un paralelipiped dreptunghic are volumul de* 480 dm^3, *lungimea și lățimea bazei de* 8 dm *și* 6 dm. *Să se calculeze aria totală și diagonala paralelipipedului.*

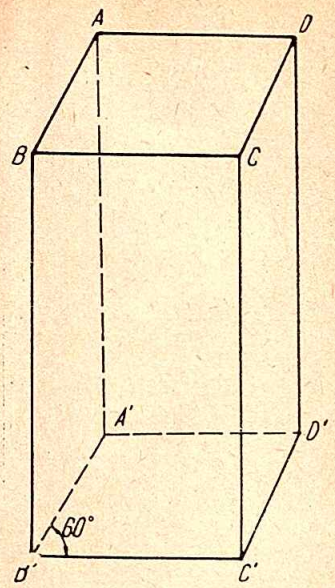


Fig. 99.

Rezolvare : Aria totală a paralelipipedului este compusă din aria laterală și ariile celor două baze. Aria laterală este egală cu produsul dintre perimetrul bazei și înălțime. Pătratul diagonalei este egal cu suma pătratelor dimensiunilor a,b,c. Pentru calcularea lor avem nevoie de înălțime, pe care o aflăm din volum.

$V = a\cdot b\cdot c$, $a = 6$ dm, $b = 8$ dm, $c =$

$$= \frac{V}{a\cdot b},\ c = \frac{480}{6\cdot 8} = 10 \text{ dm}.$$

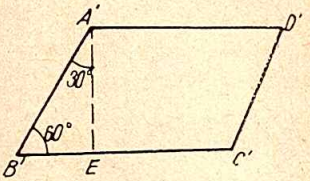


Fig. 100.

Calculăm aria totală și diagonala ; aria laterală $= (2a + 2b)\cdot c = 2(6 + 8)\cdot 10 = 280$ dm^2 ; aria totală $= 280 + 2ab = 376$ dm^2 ; $d^2 = a^2 + b^2 + c^2 = 200$, $d = \sqrt{200} = 14{,}2$ dm.

3. *Un vas de forma unui paralelipiped drept are laturile bazei de* 4 dm *și* 7 dm, *cu unghiul dintre ele de* 60°, *iar înălțimea de* 1,2 m.
Să se calculeze aria totală.

Rezolvare (fig. 99, 100) : În triunghiul $A'EB'$ avem : $B'E = A'B'\sin 60° = 2\sqrt{3}$. *Aria* $(A'B'C'D') = 7\cdot 2\sqrt{3} = 14\sqrt{3}$ dm^2 ; $I = 1{,}2$ m $= 12$ dm.

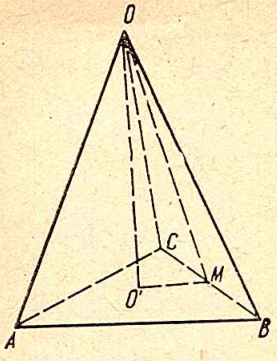


Fig. 101.

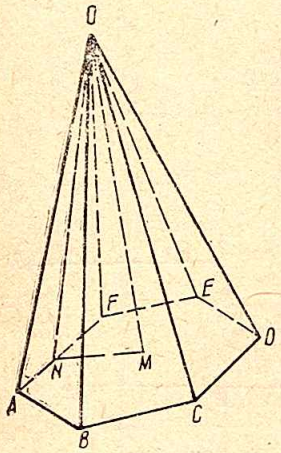


Fig. 102.

Aria totală $= 2(7+4)\cdot 12 + 2\cdot 14\sqrt{3} =$
$= 264 + 48{,}44 = 312{,}44$ dm².

4. *Aria laterală a unei piramide triunghiulare regulate este* 120 cm² *și apotema* 20 cm. *Să se afle aria totală a piramidei.*

Rezolvare (fig. 101): Se află latura triunghiului echilateral și raza cercului circumscris acestuia. Avem astfel: *perimetrul* $=$

$$= \frac{2 \text{ aria laterală}}{\text{apotema}} =$$

$$= \frac{2\cdot 120}{20} = 12 \text{ cm}; \quad l_3 = \frac{P}{3} = 4 \text{ cm}$$

$$R = \frac{l^3}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}};$$

$$A_3 = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\frac{3\cdot 16}{3}\cdot\sqrt{3}}{4}$$

$$A_3 = 4\sqrt{3}$$

aria bazei se poate afla și cu formula: $\frac{l^2\sqrt{3}}{4}$

aria totală $= 120 + 4\sqrt{3} = 126{,}92$ cm².

5. *Volumul unei piramide hexagonale regulate este* 31,40 cm³, *iar latura bazei* 2 cm. *Să se afle aria laterală și totală.*

Rezolvare (fig. 102): $l_6 = R = 2$ cm; $A_l = \frac{3R^2\sqrt{3}}{2} = \frac{3\cdot 4\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3} =$
$= 10{,}38$ cm²; $I = \frac{3\cdot V}{A} = \frac{31{,}40}{2\sqrt{3}} = 9$ cm. În triunghiul dreptunghic OMN avem:

$ON^2 = OM^2 + MN^2 = I^2 + ap^2$; $ap = \frac{R\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$; $Ap^2 = 81 + 3 = 84$.

Apotema $=9{,}16$ cm. *Aria laterală* $=$

$=\frac{P \cdot Ap}{2} = 6 \cdot 9{,}16 = 54{,}96$ cm^2.

Aria totală $=54{,}96 + 10{,}38 = 65{,}34$ cm^2.

6. *Două piramide regulate, una pătrată și alta triunghiulară, au volume egale. Prima are înălțimea de* 9 cm *și apotema de* 15 cm, *iar a doua are înălțimea de* 6 cm. *Să se afle raportul ariilor bazelor celor două piramide.*

Rezolvare (fig. 103): în triunghiul dreptunghi $OO'M$ avem:

$O'M^2 = OM^2 - OO'^2$; $a_4^2 = A_p^2 - I^2$

$O'M^2 = 225 - 81 = 144$; $O'M = 12$ cm

$a_4 = 12$ cm; $L_4 = 2 \cdot a_4 = 24$ cm

aria bazei $= L_4^2 = 24^2 = 576$ cm^2

$V = \frac{S_b I}{3}$; $V = \frac{576 \cdot 9}{3} = 1\,728$ cm^3

$V = V_1 = 1\,728$ cm^3

$V_1 = \frac{S_1 \cdot I_1}{3}$; $V_1 = \frac{S_1 \cdot 6}{3}$

$S_1 = 864$ cm^2; $2S_1 = 1\,728$.

Cunoscînd ariile bazelor celor două piramide, aflăm imediat raportul lor:

$$\frac{S}{S_1} = \frac{576}{864}, \quad \frac{S}{S_1} = \frac{2}{3}.$$

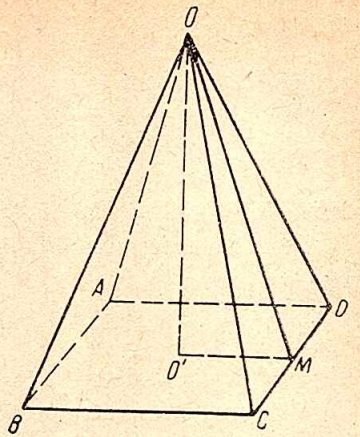


Fig. 103.

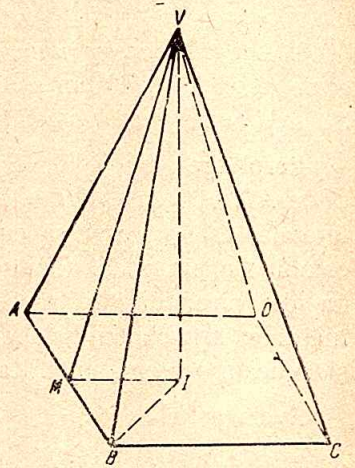


Fig. 104.

7. *Înălțimea unei piramide regulate cu baza un pătrat este egală cu* 24 cm, *iar latura bazei este de* 30 cm. *Să se determine muchia, aria laterală și volumul piramidei.*

Rezolvare (fig. 104): Fie piramida $VABCD$, unde $VI = 24$ cm, $AB = 30$ cm. Muchia laterală VB o aflăm din triunghiul dreptunghic

VIB. Avem: $VB^2 = VI^2 + IB^2$; $IB^2 = MB^2 + MI^2 = \left(\frac{AB}{2}\right)^2 + \left(\frac{AD}{2}\right)^2$

$AB = AD = 30$ cm.

Se obține:

$$IB^2 = \left(\frac{30}{2}\right)^2 + \left(\frac{30}{2}\right)^2 = 450$$

$VB^2 = 576 + 450 = 1\,026$, $VB \approx 32$ cm.

Pentru a determina aria laterală, calculăm apotema piramidei din triunghiul dreptunghi VIM; $VM^2 = VI^2 + IM^2 = 24^2 + 15^2 = 801$, $VM = 28$ cm.

$$\text{aria laterală} = \frac{P \cdot VM}{2} = 1\,680 \text{ cm}^2$$

$$\text{aria totală} = 1\,680 + 900 = 2\,580 \text{ cm}^2$$

Volumul piramidei este dat de produsul dintre aria bazei și o treime din înălțime.

$$V = \frac{\text{aria bazei} \cdot I}{3} = 900 \cdot 8 = 7\,200 \text{ cm}^3.$$

8. *Laturile bazelor unui trunchi de piramidă cu bazele pătrate sînt egale respectiv cu* 60 cm *și* 120 cm, *iar înălțimea trunchiului este* 80 cm. *Să se determine aria laterală a trunchiului de piramidă.*

Rezolvare (fig. 105): Fie trunchiul de piramidă $ABCDA_1B_1C_1D_1$, unde $AB = 60$ cm, $A_1B_1 = 120$ cm, $II_1 = 80$ cm. Pentru a determina aria laterală, este necesar să cunoaștem apotema fețelor laterale ale trunchiului de piramidă. Cunoscînd înălțimea și laturile bazelor trunchiului de piramidă, în trapezul IMM_1I_1, format din apotemele bazelor, înălțimea trunchiului și apotema sa, ducem MN paralelă cu înălțimea, și aplicăm teorema lui Pitagora.

Avem astfel:

$$MM_1^2 = MN^2 + NM_1^2$$

$$A^2 = 80^2 + 30^2;$$

$$A = \sqrt{7\,300} = 85{,}5 \text{ cm}$$

$$A_L = \frac{P + p}{2} \cdot A;$$

$$A_L = \frac{480 + 240}{2} \cdot 85{,}5$$

$$A_L = 30\,780 \text{ cm}^2 = 3{,}078 \text{ m}^2.$$

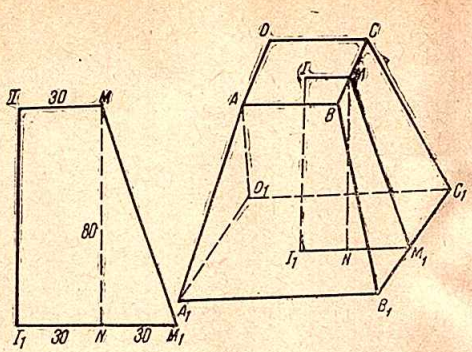


Fig. 105.

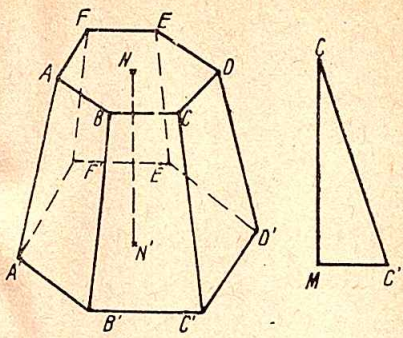


Fig. 106.

9. *Un trunchi de piramidă hexagonală regulată are muchia laterală* 5 cm, *apotema* 4 cm *și latura bazei mici* 4 cm. *Să se afle aria laterală și razele cercurilor circumscrise bazelor.*

Rezolvare (fig. 106): Se formează triunghiul dreptunghic CMC' din muchia laterală, apotemă și semidiferența bazelor.

$MC'^2 = CC'^2 - CM^2 = 25 - 16 = 9$

$MC' = 3$ cm ; $l_6 = 4$ cm

$L_6 = 4 + 2 \cdot MC' = 4 + 6 = 10$ cm

$r = l_6 = 4$ cm ; $R = L_6 = 10$ cm

$Al = \frac{(P + p) \cdot A}{2} = (24 + 60) \cdot 2$

aria laterală $= 168$ cm^2.

10. *Un trunchi de piramidă triunghiulară regulată are muchia laterală* 13 cm, *latura bazei mici* 4 cm *și latura bazei mari* 14 cm. *Să se afle aria laterală și totală a trunchiului de piramidă.*

Rezolvare (fig. 107): În triunghiul dreptunghic CDC' avem:

$CD^2 = CC'^2 - C'D^2 = 13^2 - 5^2 = 144$

$CD = 12$ cm ; $A_p = 12$ cm

aria laterală $= \frac{(P + p) \cdot A}{2} = (12 + 42) \cdot 6 = 324$ cm^2

$l_3 = r\sqrt{3}$; $4 = r\sqrt{3}$; $r = \frac{4}{\sqrt{3}}$ cm

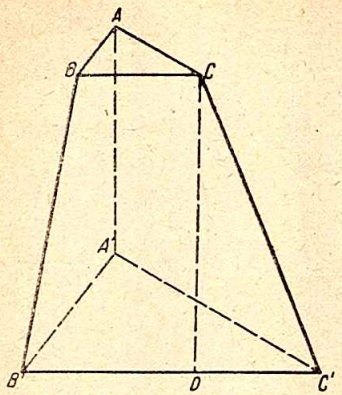


Fig. 107.

$$L_3 = R\sqrt{3};\ 14 = R\sqrt{3};\ R = \frac{14}{\sqrt{3}}$$

$$A_3 = \frac{3r^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}\ \text{cm}^2$$

$$A_3' = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3\left(\frac{14}{\sqrt{3}}\right)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 49\sqrt{3}\ \text{cm}^2$$

aria totală $= 324 + 4\sqrt{3} + 49\sqrt{3} = 324 + 53\sqrt{3} = 415{,}69\ \text{cm}^2$.

Probleme propuse

11. Se dă o prismă triunghiulară regulată, care are înălțimea 12 m, iar latura bazei 3 m. Să se determine aria totală.

12. Să se determine aria totală a unei prisme triunghiulare regulate, dacă latura bazei este egală cu a, iar muchia laterală este egală cu h.

13. Să se determine aria laterală și totală a unei prisme hexagonale regulate, care are latura bazei 10 cm, iar înălțimea 25 cm.

14. Se dă un vas în formă de prismă hexagonală regulată, avînd latura bazei 50 cm. Să se afle înălțimea la care se ridică apa în vas dacă se toarnă în el cantitatea de 240 l de apă.

15. Să se determine aria totală a unui paralelipiped dreptunghic ale cărui dimensiuni sînt: 20 cm, 15 cm și 10 cm.

16. Să se determine aria laterală și totală a unui paralelipiped dreptunghic a cărui bază este un romb, știind că diagonalele rombului sînt egale respectiv cu 12 dm și 16 dm, iar înălțimea paralelipipedului este 60 dm.

17. Unei grupe de elevi i se cere să determine cantitatea de mortar necesar pentru tencuirea fațadei clădirii noi de școală, care are lungimea 37,5 m, lățimea 10,5 m și înălțimea 12,8 m. La determinarea necesarului

de mortar se va ţine seamă : clădirea are 4 intrări, cu dimensiunile 1,8 m şi 2,4 m, şi 66 de ferestre, cu dimensiunile 1,6 m şi 2,25 m. De asemenea se ştie că la 1 m^2 de faţadă sînt necesare 20 kg de mortar.

18. Care este volumul unei camere de formă paralelipipedică cu lungimea 6,70 m, lăţimea 5,20 m şi înălţimea 2,90 m ?

19. Un bazin de forma unui paralelipiped dreptunghic lung de 3,70 m, lat de 2,60 m şi adînc de 1,50 m se umple cu apă pînă la 0,20 m de la marginea de sus. Cîţi hectolitri de apă conţine bazinul ?

20. Un bazin de formă paralelipipedică cu lăţimea de 1,20 m şi aria fundului bazinului de 9,60 m^2 are capacitatea 26 400 l. Să se calculeze lungimea şi adîncimea bazinului.

21. Lamelele unui colector de maşină electrică de curent continuu se taie din bucăţi de cupru de formă paralelipipedică, cu dimensiunile de 6 cm, 4 cm şi 2 cm. Asemenea bucăţi de cupru sînt ambalate într-o ladă în formă de paralelipiped, cu dimensiunile : 0,85 m, 0,4 m şi 0,3 m. Să se afle cîte bucăţi de cupru vor intra în ladă dacă 10% din volumul lăzii este ocupat de ambalaj.

22. De la săparea unui bazin de formă paralelipipedică cu dimensiunile 12,5 m, şi 1,2 m pămîntul scos a fost împrăştiat într-un strat gros de 15 cm. Să se afle care este suprafaţa ce s-a acoperit cu acest pămînt, ştiind că 3 m^3 de pămînt nesăpat dau 4 m^3 de pămînt împrăştiat.

23. Într-un depozit de formă paralelipipedică, cu dimensiunile de 15 m, 20 m şi 5 m, se depozitează scînduri din lemn de brad. Se întreabă cîte vagoane de 10 t din acest material pot fi depozitate, ştiind că volumul unui vagon de 10 t este egal cu 11 m^3 şi că depozitul poate fi umplut pînă la 89,1% din volumul său.

24. Dintr-o foaie de tablă dreptunghiulară cu dimensiunile 26 cm şi 18 cm se taie la colţuri pătrate cu latura de 5 cm. Aripile rămase se îndoiesc sub un unghi de 90° şi se sudează, formînd o cutie paralelipipedică. Se cere să se afle volumul cutiei.

25. Care este masa unei bare de oţel lungă de 2,50 m, avînd secţiunea dreptunghiulară, cu dimensiunile 14 cm şi 12 cm, dacă densitatea oţelului este 7,8.

26. O cameră are înălțimea 3 m și volumul 72 m^3, forma sa fiind paralelipipedică. Se întreabă cîte persoane pot locui în această cameră, dacă spațiul necesar de locuit pentru o persoană este 8 m^2.

27. Pentru pavarea unei străzi se întrebuințează pietre paralelipipedice cu lungimea de 10 cm, lățimea 8 cm și grosimea 6 cm. Cunoscînd că au fost necesare 1 000 de pietre, se întreabă ce suprafață din stradă s-a pietruit și care este volumul pietrei folosite.

28. Un paralelipiped dreptunghic are o latură a bazei de 8 m și diagonala bazei de 10 m. Înălțimea paralelipipedului este $\frac{2}{3}$ din perimetrul bazei. Să se afle aria totală și volumul paralelipipedului.

29. Într-o cutie lungă de 12 cm, lată de 4 cm și înaltă de 3 cm poate intra un ac de oțel lung de 15 cm?

30. O cutie are forma de prismă dreaptă, cu baza un hexagon regulat. Latura hexagonului este 2 dm, iar muchia laterală 5 dm. Să se afle aria laterală și volumul cutiei.

31. O cooperativă agricolă de producție a avut o recoltă bogată de cereale. Pentru depozitare, pe lîngă hambarele existente, țăranii cooperatori au construit un hambar de formă paralelipipedică, cu înălțimea 4 m și dimensiunile bazei 5,4 m și 4,5 m. Să se determine cîți dublidecalitri cereale încap în hambar.

32. O cooperativă agricolă de producție a însilozat 120 t de furaje într-un siloz a cărui secțiune transversală, cu dimensiunile exprimate în metri, este dată în figura 108. Să se afle ce lungime are silozul, știind că cele 120 t de furaje însilozate au volumul egal cu 200 m^3.

33. Să se determine masa unei bare de oțel de forma unui paralelipiped dreptunghic cu lungimea 230 cm, lățimea 15 mm și grosimea 16 mm, știind că densitatea oțelului este 7,8.

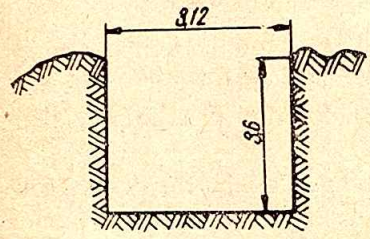


Fig. 108.

34. La clădirea unei case se folosesc cărămizi cu dimensiunile de: 6 cm, 12 cm și 24 cm. Știind că toată clădirea are 23 m^3 de zidărie și într-un metru cub de zidărie intră 440 de cărămizi, se cere:

a) Cîte cărămizi sînt necesare ?

b) Cît la sută din volumul zidului reprezintă mortarul la metrul cub de zidărie.

35. Un paralelipiped cu baza un paralelogram are înălțimea $\frac{7}{4}$ din lungimea bazei. Laturile paralelogramului sînt 8 cm și 6 cm, iar unghiul format de ele este egal cu 30°. Să se afle volumul paralelipipedului

36. Baza unei prisme drepte este un triunghi dreptunghic. Ipotenuza triunghiului este 20 cm, iar o catetă 16 cm. Înălțimea prismei este egală cu 40 cm. Să se afle aria și volumul prismei.

37. Se dă un cub care are volumul de 125 dm^3. Să i se determine aria totală și laterală.

38. Se dă un cub a cărui diagonală este egală cu 45 cm. Să se determine aria și volumul acestui cub.

39. Să se afle volumul unei cisterne în formă de cub, știind că diagonalele acestui cub sînt 3 m. Să se afle ce cantitate de petrol intră în cisternă, știind că densitatea petrolului este 0,8.

40. Pe cele două talere ale unui cîntar stau două corpuri în formă de cub, unul fiind de plumb cu latura 2 cm și altul de oțel cu latura 3 cm. Cunoscînd densitatea plumbului 11,3, iar a oțelului 7,8, se întreabă în ce parte se va înclina balanța.

41. O piesă în formă de prismă hexagonală, avînd aria bazei 4 cm^2 și grosimea 4 mm, se toarnă din fontă. Să se afle cîtă fontă este necesară pentru 120 de piese.

42. Un bazin paralelipipedic lat de 4 m și adînc de 3 m conține 96 m^3 de păcură. Se cere să se afle lungimea bazinului.

43. Pentru pavarea unei alei lungi de 320 m și late de 3 m se folosesc plăci în formă de prismă cu baza un pătrat, avînd latura 3 dm și grosimea 4 cm. Să se afle volumul și numărul plăcilor necesare pentru pavarea aleii.

44. Un coș pentru hîrtii confecționat din tablă în formă de trunchi de piramidă are bazele pătrate cu laturile 2 dm, 4 dm și adîncimea 5 dm. Să se afle cîți metri pătrați de tablă se întrebuințează pentru confecționarea a 1 500 de coșuri.

45. O piatră kilometrică are forma de trunchi de piramidă pătratică, cu muchiile bazelor 3 dm și 2 dm, iar muchia laterală egală cu

5 dm. Dacă se vopsesc pietrele kilometrice pe o șosea de 160 km, să se afle suprafața vopsită.

46. O piramidă regulată cu baza un triunghi are latura bazei egală cu 3 m și aria totală 30,24 m². Să se afle la ce depărtare de baze trebuie dus un plan paralel cu baza pentru a obține o secțiune cu aria 0,86 m²

47. Să se determine aria totală și înălțimea unui tetraedru regulat, știind că muchiile tetraedrului sînt egale cu 40 cm.

48. Să se determine aria laterală și volumul unei piramide hexagonale regulate, care are înălțimea egală cu 100 cm, iar apotema bazei piramidei este egală cu 26 cm.

49. Se dă o piramidă regulată cu baza un triunghi. Apotema triunghiului este 24 cm, iar înălțimea piramidei 32 cm. Să se determine aria totală a piramidei.

50. Muchia laterală a unei piramide hexagonale regulate este egală cu 8 dm, iar latura bazei este egală cu 48 cm. Să se calculeze volumul piramidei.

51. Să se confecționeze din carton o piramidă pătrată regulată, cu laturile bazei 6 cm și muchia laterală 7 cm.

52. Se dă piramida triunghiulară $SABC$, în care avem: $SA=SB=SC=a$, $\widehat{ASB}=60°$, $\widehat{ASC}=90°$, $\widehat{BSC}=120°$. Să se calculeze aria laterală a piramidei cînd apotema sa este egală cu $\frac{a}{2}$.

53. Într-o piramidă patrulateră regulată, diagonala bazei este 8 cm, iar înălțimea 12 cm. Se cere să se afle volumul piramidei.

54. Într-o piramidă hexagonală regulată, latura bazei este 5 cm, iar muchiile laterale sînt înclinate cu 60° pe planul bazei. Să se afle muchia laterală.

55. Într-o piramidă hexagonală regulată, apotema bazei este 4 cm, iar fețele laterale sînt înclinate față de planul bazei cu 45°. Să se afle înălțimea piramidei.

56. Într-o piramidă patrulateră regulată, se dau: latura bazei de 16 cm și înălțimea 15 cm. Se cere să se afle volumul piramidei, apotema și aria laterală.

57. O față laterală a unei piramide patrulatere regulate este un triunghi isoscel, cu baza de 10 cm și laturile egale de cîte 13 cm. Se cere să se afle apotema piramidei, înălțimea piramidei și volumul piramidei.

58. Un trunchi de piramidă are baza mare un pătrat cu latura de 5 dm. Știind că volumul este de 62 dm^3 și înălțimea de 6 dm, să se afle aria bazei mici.

59. Un trunchi de piramidă regulată are ca baze două pătrate cu laturile de 90 cm și 30 cm. Știind că volumul trunchiului este 156 000 cm^3, să se calculeze aria laterală.

60. Elevii unei școli au participat la acțiunea de sădire a pomilor fructiferi. În orele lucrate, ei au săpat un volum de 127,4 m^3 de pămînt. Să se determine numărul puieților sădiți, știind că forma unei gropi este aceea a unui trunchi de piramidă, avînd baza mare și baza mică pătrate, cu dimensiunile respective 50 cm și 30 cm, iar înălțimea trunchiul 39 cm.

61. Membrii unei cooperative agricole de producție construiesc pătule pentru păstrarea recoltei bogate de porumb. Aceste pătule se sprijină la bază pe stîlpi de beton care au forma de trunchi de piramidă patrulateră regulată cu înălțimea 120 cm. Știind că laturile bazelor stîlpilor sînt egale respectiv cu 20 cm și 40 cm, să se determine masa unui stîlp, densitatea betonului fiind 2,1 g/cm^3.

62. O cooperativă agricolă de producție sapă un canal principal de irigare prin care apa este îndreptată către terenurile fertile. Fundul canalului și părțile laterale se consolidează pentru evitarea surpărilor. Secțiunea transversală prin canal este un trapez isoscel cu baza mare 3 m, baza mică 2 m, înălțimea 1,5 m. Știind că lungimea canalului este 600 m, să se determine aria suprafeței ce trebuie consolidată.

63. Să se determine aria laterală, aria totală și volumul unui trunchi de piramidă regulată cu bazele pătrate, dacă laturile au valorile 18 cm și 8 cm, iar înălțimea 12 cm.

64. Un piedestal de granit are forma unui trunchi de piramidă regulată cu bazele pătrate. Știind că înălțimea lui este 4 m, iar cele două baze au laturile 3 m și 2 m să se afle masa, avînd densitatea de 2,5 g/cm^3.

65. Un trunchi de piramidă regulată are latura bazei mari 10 cm, latura bazei mici 4 cm și apotema 4 cm. Să se afle aria laterală, razele cercurilor circumscrise bazelor, înălțimea trunchiului de piramidă și volumul său.

Capitolul XXIV

Corpuri rotunde

1. *Înălțimea unui cilindru este cu* 10 cm *mai mare decît raza cercului de bază, iar aria totală este egală cu* 144π cm^2. *Să se determine raza cercului de bază și înălțimea.*

Rezolvare: $I = R + 10$; aria totală $= 2\pi R\,(R + I)$; $144\pi = 2\pi R(R + I)$. Înlocuim înălțimea și obținem: $72 = R\,(R + R + 10)$; $72 = 2R^2 + 10R$, $R^2 + 5R - 36 = 0$. Ecuația de gradul II rezolvată are soluția $R_1 = 4$, $R_2 = -9$, $I = R + 10 = 4 + 10 = 14$ cm.

2. *Să se determine aria totală a cilindrului în care este înscris un cub cu muchia egală cu a (vîrfurile cubului se găsesc pe cercurile de bază ale cilindrului.).*

Rezolvare: Cubul cu muchia a are diagonalele bazelor diametri în cercurile de bază ale cilindrului.

$$D^2 = (2R)^2 = a^2 + a^2 = 2a^2; \quad D = 2R = a\sqrt{2}; \quad R = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Generatoarea cilindrului este egală cu muchia cubului. Aria totală a cilindrului este egală cu aria laterală adunată cu dublul ariei cercului de bază; aria laterală este egală cu produsul dintre lungimea cercului de bază și înălțime.

Avem astfel:

$$\text{aria laterală} = 2\pi\,\frac{a\sqrt{2}}{2}\cdot a = \pi a^2\sqrt{2}; \quad 2\cdot\text{aria bazei} = 2\pi R^2 = 2\pi\,\frac{a^2\cdot 2}{4} = \pi a^2;$$

$$\text{aria totală} = \pi a^2\sqrt{2} + \pi a^2 = \pi a^2\,(1 + \sqrt{2}).$$

3. *Pe coşul cilindric al unei fabrici, înalt de* 15 cm *şi cu diametrul de* 1 m, *s-a depus un strat de funingine gros de* 5 cm. *Ce volum de funingine se scoate la curăţirea coşului?*

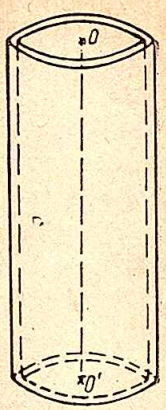


Fig. 109.

Rezolvare (fig. 109): Volumul funinginii este egal cu diferenţa dintre volumul cilindrului dat şi volumul cilindrului care are raza cu 5 cm mai mică.

$V = \pi R^2 l$, $V_1 = 3{,}14 \cdot 4{,}5^2 \cdot 150 = 9\,537$ dm³

$V_2 = 3{,}14 \cdot 5^2 \cdot 150 = 11\,775$ dm³

$V = V_2 - V_1$

$V = 11\,775 - 9\,537 = 2\,238$ dm³

Volumul funinginii este 2 238 dm³.

4. *Într-un vas cilindric cu diametrul* 0,084 m, *în care se află apă, s-a scufundat o piesă metalică şi apa s-a ridicat cu* 0,02 m. *Care este volumul acestei piese?*

Rezolvare: Principiul lui Arhimede ne spune că masa unui corp scufundat într-un lichid este egală cu volumul lichidului dislocat de acel corp. Astfel, volumul piesei este egal cu volumul cilindrului care are raza 4,2 cm, iar înălţimea 2 cm. Înlocuind în formulă avem: $V = \pi R^2 \cdot l$, $V = 3{,}14 \cdot (4{,}2)^2 \cdot 2$; $V = 6{,}28 \cdot 17{,}64 = 110{,}77$ cm³.

5. *Acoperişul unui turn de siloz are forma de con. Înălţimea acoperişului este* 2 m *şi diametrul bazei turnului* 6 m. *Să se afle cîte foi de tablă sînt necesare pentru acoperirea lui, dacă o foaie are dimensiunile* 0,7 m *şi* 1,4 m, *iar pentru încheieturi se consumă* 10% *din cantitate.*

Rezolvare: (fig. 110): Cantitatea de tablă necesară este dată de aria laterală a suprafeţei turnului. Generatoarea $G = AC$, se află din triunghiul dreptunghic ADC, unde $AD = 2$ m este înălţimea turnului, iar $DC = 3$ m este raza bazei conului.

Avem:

$AC^2 = AD^2 + DC^2$

$AC^2 = 2^2 + 3^2 = 13$

$AC = \sqrt{13} = 3{,}6$ m

aria laterală $= 3{,}14 \cdot 3 \cdot 3{,}6$

aria laterală $= 33{,}91$ m².

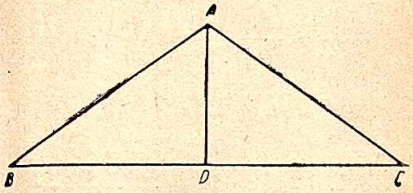


Fig. 110.

Deoarece pentru îmbinări sînt necesare încă 10% din cantitate, se mai adaugă 33,9.0,10=3,39 m². Cantitatea de tablă totală este 37,30 m². O foaie de tablă are dimensiunile 0,7 m, 1,4 m și suprafața 0,98 m². Numărul foilor de tablă este egal cu raportul dintre aria cantității de tablă necesară și aria unei singure foi de tablă, adică 37,30 : 0,98 =38 foi tablă pentru acoperiș.

6. *Care este capacitatea unei pîlnii de formă conică, avînd raza bazei* 0,23 m *și înălțimea* 0,52 m.

Rezolvare: $R=0{,}23$ m $=2{,}3$ dm ; $I=0{,}52$ m $=5{,}2$ dm ;

$$V=\frac{\pi R^2 I}{3};\quad V=\frac{3{,}14\cdot(2{,}3)^2\cdot 5{,}2}{3}=28{,}79 \text{ dm}^3.$$

Capacitatea pîlniei este egală cu 28,79 l.

7. *Un con circular drept are raza bazei* 40 cm *și generatoarea* 50 cm. *La* 10 cm *depărtare de vîrf se face o tăietură printr-un plan paralel cu baza. Să se afle:*

a) *Aria totală a conului dat.*

b) *Aria totală și volumul conului cu baza cercul de secțiune.*

Rezolvare (fig. 111):

$At=\pi R\,(G+R)$

$At=3{,}14\cdot 40\,(50+40)=314\cdot 36=11\,304$ cm².

În triunghiul $OO''A$ avem:

$OO''^2=OA^2-O''A^2$, $OO''^2=2\,500-1\,600$

$OO''^2=900$; $OO''=30$ cm

$$\triangle OO'B\sim\triangle OO''A\,;\ \frac{OO'}{OO''}=\frac{O'B}{O''A}=\frac{OB}{OA}$$

$$\frac{10}{30}=\frac{O'B}{40}\,;\ O'B=\frac{400}{30}=\frac{40}{3}$$

$$r=O'B=\frac{40}{3}\text{ cm}$$

$$\frac{OO'}{OO''}=\frac{OB}{OA}\,;\ \frac{10}{30}=\frac{OB}{50}\,;\ OB=\frac{500}{30}=\frac{50}{3}\,;\ G'=OB=\frac{50}{3}\text{ cm}$$

$$A't=\pi r\,(G'+r)\,;\quad A't=3{,}14.\left(\frac{50}{3}+\frac{40}{3}\right)\cdot\frac{40}{3}=1\,256\text{ cm}^2$$

$$V'=\frac{\pi r^2\cdot I'}{3}\,;\ V'=\frac{3{,}14\cdot 1\,600\cdot 10}{27}=1\,860\text{ cm}^3.$$

8. *Bazele unui trunchi de con au diametrele egale respectiv cu* 3m *și* 9 m, *iar generatoarea de* 5 m. *Să se determine înălțimea, aria laterală, aria totală și volumul trunchiului de con.*

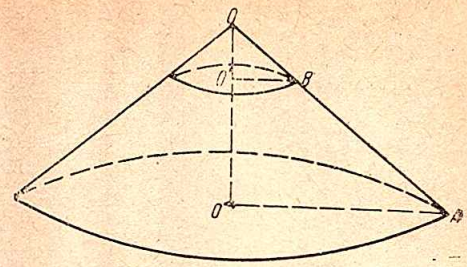


Fig. 111.

Rezolvare (fig. 112): Se dă $AD=3$ m, $BC=9$ m, $DC=5$ m. Se cere înălțimea, aria laterală, aria totală și volumul trunchiului de con.

$$D_1C=\frac{BC-AD}{2}=\frac{9-3}{2}=3 \text{ m}$$

În triunghiul DD_1C avem:

$DD_1^2=DC^2-D_1C^2=5^2-3^2=16$; $DD_1=4$ m; $A_L=\pi G(R+r)=$

$=3{,}14\cdot 5(4{,}5+1{,}5)$; $A_L=94{,}20$ m^2

aria bazei mici $=7{,}07$ m^2

aria bazei mari $=\pi\cdot(4{,}5)^2=63{,}59$ m^2; $A_t=A_l+S_B+S_b=94{,}20+$

$+63{,}59+7{,}07=164{,}86$ m^2

$$V=\frac{\pi\cdot l}{3}(R^2+r^2+Rr)=\frac{3.14\cdot 4}{3}(4{,}5^2+1{,}5^2+4{,}5\cdot 1{,}5)=122{,}46 \text{ m}^3.$$

9. *Un rezervor de păcură de formă conică cu diametrul de* 6 m *și adîncimea de* 15 m *se umple cu păcură pentru decantare. După decantare reziduul se depune la fund ridicîndu-se pînă la înălțimea de* 9 m, *restul fiind ocupat de păcură curată. Să se afle volumul în decimetri cubi ocupat de păcură curată și de reziduu.*

Rezolvare (fig. 113): Volumul ocupat de reziduu este egal cu volumul trunchiului de con cu înălțimea de 9 m, iar volumul ocupat de păcură curată este egal cu volumul conului care are înălțimea de 6 m. Se dă: $DE=R=30$ dm; $AD=H=150$ dm; $AB=h=60$ dm.

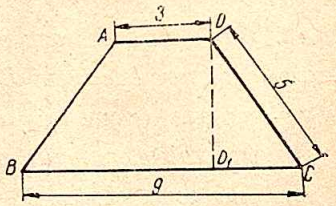


Fig. 112.

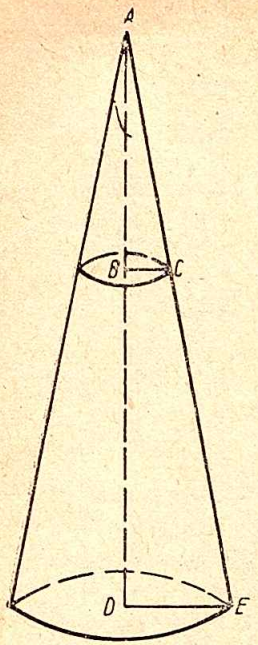


Fig. 113.

$\triangle ABC \sim \triangle ADE$

$\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DE}$; $\frac{60}{150} = \frac{BC}{30}$

$BC = \frac{60 \cdot 30}{150} = 12$ dm

$r = BC = 12$ dm

$V.tr.\ con. = \frac{\pi h}{3}(R^2 + Rr + r^2)$

$V.tr.\ con. = \frac{3{,}14 \cdot 90}{3}(900 + 30 \cdot 12 + 144)$

$V.tr.\ con. = 170\,712$ dm^3

$V.con. = \frac{\pi r^2 l}{3}$

$V.con. = \frac{3{,}14 \cdot 144 \cdot 60}{3} = 9043{,}20$

$V.con. = 9043{,}20$ dm^3

10. *O sferă cu raza de* 15 cm *este făcută din fier. Să se afle*:

a) *Masa sferei, știind că densitatea fierului este* 7,8 g/cm^3.

b) *Suprafața care trebuie vopsită.*

Rezolvare:

a) $V = \frac{4\pi R^3}{3}$; $V = \frac{4 \cdot 3{,}14 \cdot 15^3}{3} = \frac{12{,}56 \cdot 3\,375}{3} = 14\,130$ cm^3; $M = V \cdot D$;

$M = 14\,130 \cdot 7{,}8 = 110{,}214$ kg.

b) $A = 3{,}14 \cdot 4 \cdot 15^2 = 2\,826$ cm^2.

11. *Într-o sferă de rază* 6 cm *se fac două secțiuni prin plane paralele, a căror depărtare este* 4 cm. *Știind că depărtarea de la centrul sferei la unul din plane este* 1 cm, *să se afle*:

a) *Aria calotelor sferice determinate de cele două plane.*

b) *Aria zonei sferice.*

c) *Razele cercurilor de secțiune.*

Rezolvare (fig. 114):

a) $A_1 = 2\pi R l_1$; $l_1 = 3$ cm.

$A_L = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 6 \cdot 3 = 113{,}04$ cm^2.

$l_2 = 5$ cm; $A_2 = 2\pi R l_2$.

$A_2 = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 6 \cdot 5 = 188{,}40$ cm^2.

b) Aria zonei $= 2\pi R l$, $l = 4$ cm;
aria zonei $= 2 \cdot 3{,}14 \cdot 6 \cdot 4 = 150{,}72$ cm^2.

c) În triunghiul dreptunghic OO_2B avem: $O_2B^2 = OB^2 - OO_2^2 = 36 - 1 = 35$ și $O_2B = \sqrt{35} = 5{,}9$ cm.

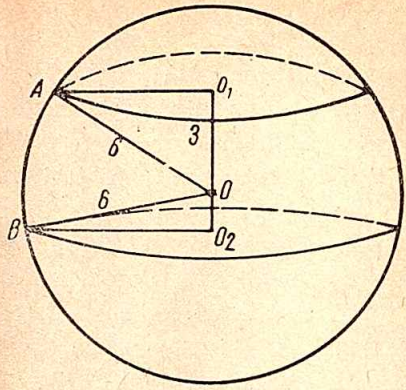


Fig. 114.

În triunghiul dreptunghic OO_1A avem: $O_1A^2 = OA^2 - OO_1^2 = 36 - 9 = 27$ și $O_1A = 3\sqrt{3}$ cm.

Probleme propuse

12. Raza unui cilindru circular drept este 6 cm, iar înălțimea sa 4 cm. Se cere să se afle aria totală și volumul cilindrului.

13. Volumul unui cilindru este 700 π cm^3, iar raza 10 cm. Să se afle înălțimea și aria laterală a cilindrului.

14. Aria laterală a unui cilindru este 176 π cm^2 și raza cercului de la bază 8 cm. Să se afle înălțimea și aria totală a cilindrului.

15. Raza unui cilindru este 4 cm și aria laterală 96 π cm^2. Să se afle volumul și aria totală a cilindrului.

16. Un cilindru circular drept are înălțimea egală cu 6 cm și volumul 54π cm^3. Să se afle aria totală și raza.

17. Înălțimea unui cilindru este 14 dm și aria laterală 140π cm^2. Să se afle volumul și aria totală a cilindrului.

18. Aria laterală a unui cilindru este 600π cm^2, iar volumul 4 500 cm^3. Să se afle raza, înălțimea și aria totală a cilindrului.

19. Aria laterală a unui cilindru este 338π cm^2, iar aria totală 500π cm^2. Să se afle înălțimea, raza și volumul cilindrului.

20. O cutie cu cacao are forma unui cilindru cu raza de 6 cm și înălțimea de 10 cm și costă 28 de lei. Pentru a obține cacao se adaugă o cantitate de lapte obișnuită egală cu de 5 ori volumul conținutului cutiei. Se cere să se afle costul unui litru de cacao, știind că 1 l de lapte costă 2 lei.

21. O cutie de bomboane are forma cilindrică și este confecționată din tablă specială. Ce dimensiuni și ce formă trebuie să aibă foaia de tablă ca să se poată face din ea cutia fără capace, acestea fiind croite separat, pentru ca suprafața tiparului să fie 94,32 cm^2 și raza 3 cm.

22. Diametrul cercului de bază al unui cilindru este egal cu 18 cm, iar înălțimea este egală cu lungimea bazei. Să se determine aria laterală a cilindrului.

23. Care este aria laterală a unui cilindru cu raza bazei de 0,32 m și înălțimea 2,60 m ?

24. Cîți decalitri de benzină încap într-un rezervor cilindric cu diametrul de 0,64 m și înălțimea de 0,70 m ?

25. Ce rază trebuie să aibă baza unui rezervor cilindric cu o adîncime de 2,60 m, pentru o capacitate de 1 200 hl ?

26. Distanța dintre doi stîlpi este 20 m. De acești stîlpi sînt prinse 7 fire avînd forma cilindrică, cu diametrul 4 mm. Datorită masei proprii firele nu pot fi întinse în linie dreaptă, ci atîrnă în formă curbată, astfel încît lungimea firului este cu 10% mai mare decît distanța rectilinie dintre stîlpi. Să se afle masa acestor fire, știind că ele sînt din cupru și că au densitatea 8,9 g/cm^3.

27. Un colac de sîrmă de cupru pentru rețeaua de distribuție electrică cîntărește 20 kg, diametrul sîrmei fiind 4 mm.

a) Să se afle lungimea sîrmei, știind că densitatea cuprului este 8,9 g/cm^3.

b) Dacă între doi stîlpi se întind 22 m sîrmă, cîți stîlpi se pot parcurge cu acest colac.

28. Aria laterală a unei coloane cilindrice cu înălțimea de 10 m este de 31,40 m^2. Să se afle volumul și masa coloanei, știind că este făcută din piatră cu densitatea 3.

29. Bolta unei pivnițe de formă semicilindrică are lungimea 5 m și diametrul 5,8 m. Să se determine cantitatea de mortar necesară pentru

tencuire, știind că pentru 1 m^2 suprafață de tencuit este necesară cantitatea de 25 kg de mortar.

30. Să se afle în cît timp va fi golit un bazin cilindric cu raza de 5 m și adîncimea de 7 m plin cu apă, de o pompă care scoate 3 m^3 de apă pe oră.

31. Să se afle aria laterală și totală a unui cilindru care are aria secțiunii axiale de 200 cm^2, iar generatoarea este dublul diametrului cercului de bază.

32. O bară de fier care are ca secțiune un pătrat cu latura de 4 cm și lungimea de 1,60 m se prelucrează la strung ca să devină cilindrică. Să se afle masa barei, densitatea fiind egală cu 7,8.

33. Înălțimea unui cilindru este jumătate din rază. Să se compare aria laterală a acestui cilindru cu aria bazei sale.

Aplicație numerică $R = 8$ cm.

34. O echipă de muncitori are de executat un rezervor cilindric din tablă de 10 mm grosime. Rezervorul are raza exterioară de 5 m și înălțimea de 10 m. Cîte kilograme cîntărește rezervorul gol, dacă densitatea oțelului este 7,8 g/cm^3.

35. Un rezervor cilindric de ulei are diametrul interior de 20 cm și lungimea interioară de 180 cm. Să se determine cantitatea de ulei necesară pentru a umple rezervorul.

36. Să se execute 200 m liniari de conductă pentru liniile telefonice subterane. Secțiunea transversală a conductei este dată în figura 115, cu dimensiunile exprimate în centimetri. Conducta este din beton. Știind că la un metru cub de beton este necesară cantitatea de 320 kg de ciment, să se determine cantitatea totală de ciment utilizată.

37. Cîtă sîrmă cu diametrul de 2 mm se obține dintr-un colac de 100 m cu diametrul de 5 mm, prin trefilare la rece ?

38. Un rezervor de apă acoperit și de formă cilindrică este confecționat din tablă de oțel cu densitatea 7,8 g/cm^3. Să se determine cantitatea de tablă necesară confecționării, știind că are dia-

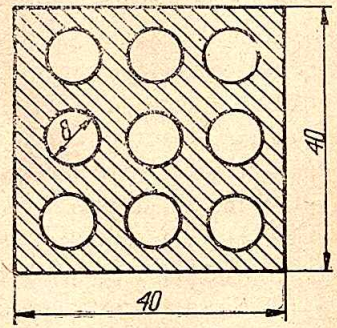


Fig. 115.

metrul exterior de 2,5 m, înălțimea de 3 m, iar grosimea tablei de 0,3 cm.

39. Să se determine masa unei bare cilindrice din oțel cu diametrul de 60 mm și lungimea de 2,25 m, oțelul avînd densitatea egală cu 7,8 g/cm³.

40. Un cilindru circular drept are înălțimea cu 10 cm mai mare decît raza bazei și aria totală egală cu 3 768 cm². Să se afle raza bazei și înălțimea.

41. La un con, raza este egală cu 15 cm și generatoarea cu 30 cm. Să se calculeze aria totală și aria laterală a conului.

42. Înălțimea unui con este 12 cm și raza 5 cm. Să se afle volumul și aria laterală a conului.

43. Generatoarea unui con este 25 cm și aria totală 224 π cm². Să se afle înălțimea conului.

44. Înălțimea unui con este egală cu 8 cm, iar unghiul de la vîrful conului este de 90°. Să se afle aria laterală a conului.

45. Raza unui con este egală cu 4 cm, iar generatoarea face cu planul bazei un unghi de 60°. Să se afle volumul conului.

46. Aria laterală a unui con este de 1 004,80 m², iar raza conului este $\frac{4}{5}$ din generatoare. Să se calculeze volumul conului.

47. Înălțimea unui con este 15 m, iar generatoarea este 17 m. Să se calculeze aria laterală și volumul conului.

48. Înălțimea unui con este 24 m, iar aria totală este 736 π m². Să se calculeze volumul și aria laterală a conului.

49. Un cort de formă conică cu înălțimea 3,5 m și cu diametrul 4 m este confecționat din pînză de doc. Cîți metri de doc vor fi necesari pentru confecționarea cortului, știind că lățimea docului este de 0,70 m.

50. Un con circular drept are raza bazei egală cu 16 cm și înălțimea cu 12 cm. Să se afle aria laterală și aria totală a conului.

51. Un con circular drept are raza bazei de 2 m și generatoarea de 2,5 m. Să se afle volumul conului.

52. Un con circular drept are volumul de 1 256 cm³ și lungimea cercului de bază egală cu 12,56 dm. Să se afle aria totală a conului.

53. Să se afle aria laterală a unui con cu raza 0,25 m și generatoarea 0,75 m.

54. Un tub de oțel este format din două bucăți cilindrice sudate. Prima bucată are lungimea 4,5 cm, diametrul interior 17,5 cm, iar cel exterior 20,5 cm. A doua bucată are lungimea de 5 m, diametrul interior de 15 cm și cel exterior de 17,5 cm. Să se afle masa tubului, știind că densitatea oțelului este 7,8 g/cm^3.

55. Un trunchi de con are razele 2 cm și 6 cm, iar volumul 163,280 cm^3. Să se calculeze aria lui laterală.

56. Aria laterală a unui trunchi de con este 706,50 m^2, generatoarea 25 m și înălțimea 24 m. Să se calculeze volumul trunchiului de con.

57. Într-un con cu diametrul de 200 mm și înălțimea de 350 mm se face o secțiune paralelă cu baza la depărtarea de 150 mm de vîrf. Să se calculeze volumul trunchiului de con rămas.

58. Să se afle aria laterală a unui trunchi de con cu diametrul bazei mari 0,64 m, diametrul bazei mici 0,38 m și generatoarea 0,70 m.

59. Să se calculeze în litri capacitatea unei găleți de forma unui trunchi de con al cărei fund are raza 0,16 m, raza de la gură 0,20 m și înălțimea 0,42 m.

60. Să se calculeze capacitatea unei putini în formă de trunchi de con, avînd diametrul la fund de 1 m și la gură de 0,8 m, iar lungimea unei doage fiind de 1 m (generatoarea).

61. O căldare are forma unui trunchi de con. Ce cantitate de apă intră în ea dacă se umple 80% din volumul ei. Dimensiunile căldării sînt: diametrul mic 20 cm, diametrul mare 40 cm, iar înălțimea egală cu lungimea cercului mic.

62. Să se afle volumul unei sfere, știind că aria este 16π cm^2.

63. Să se afle aria unei sfere cu volumul de 36π cm^3.

64. Să se afle aria unei sfere cu raza egală cu 5 cm.

65. O sferă cu raza de 14 cm se taie cu un plan situat la o distanță de 5 cm de centrul ei. Se cere să se afle aria secțiunii.

66. O sferă cu raza de 6 cm se taie cu un plan. Să se afle distanța de la centrul sferei la planul de secțiune, aria cercului de secțiune fiind un sfert din aria unui cerc mare al sferei.

67. Un ornament este format dintr-un cub cu aria totală de 24 dm^2 și o sferă cu diametrul egal cu muchia cubului. Ornamentul este făcut din piatră cu densitatea 3 g/cm^3. Să se afle masa ornamentului.

68. O calotă sferică are aria 31,40 dm^2 și înălțimea 1 dm. Să se afle aria și volumul sferei din care face parte calota.

69. O cisternă este formată dintr-un cilindru și din două emisfere. Diametrul cisternei este 1,2 m, iar lungimea porțiunii cilindrice 3,5 m. Să se afle cîtă tablă este necesară pentru confecționarea cisternei, știind că adaosul de îmbinări este 2% din suprafață.

70. Lungimea unui cerc mare de sferă este egală cu 31,4 dm. Să se afle aria și volumul sferei.

71. Să se afle cîtă tablă este necesară pentru confecționarea unui vas de formă cilindrică terminat cu o emisferă cu raza de 6 cm și înălțimea vasului 26 cm.

72. Într-un con cu raza 6 m și generatoarea 7,5 m se face o secțiune paralelă cu baza la $\frac{2}{3}$ de vîrf. Să se afle raza, înălțimea și generatoarea conului mic format.

73. Să se afle volumul conului cu raza 3,1 m și generatoarea 5 m.

74. Să se afle aria laterală a trunchiului de con cu raza mică 3,2 m, raza mare 5 m și generatoarea 6 m.

75. Care este volumul unui trunchi de con cu raza mică egală cu 3 m, raza mare cu 5 m și generatoarea cu 7 m.

76. Să se afle distanța între două plane paralele care taie sfera cu raza 5 dm după două cercuri avînd razele 3 dm și 2 dm (se vor considera două cazuri).

77. Să se afle aria sferei, știind că un plan secant dus la distanța de 2 m de centrul sferei o taie după un cerc cu raza de 3 m.

78. O sferă cu raza de 2 cm are volumul egal cu volumul unei prisme cu baza un pătrat și înălțimea 3 cm. Să se afle latura pătratului.

Probleme de sinteză

1. Se dă expresia:

$$E(a)=\frac{\frac{1}{2}}{a^2+6a+9}+\frac{\frac{1}{2}}{9-6a+a^2}-\frac{1}{a^2-9}\cdot\left(\frac{1}{2a+6}+\frac{1}{9-3a}\right)\cdot\left(\frac{2}{a-15}-\frac{2a}{a^2-9}\right)}.$$

Se cere:

1) Să se aducă la forma cea mai simplă.

2) Să se afle valoarea numerică a expresiei $E(a)$ pentru:

$$a=\frac{\left(2\frac{1}{2}-1\right)\frac{2}{5}+2\left(1{,}08-\frac{2}{25}\right):\frac{2}{3}}{\left(5\frac{1}{3}-3\frac{3}{4}\right):1\frac{7}{12}+2}\left(2-0{,}8:2\frac{2}{5}\right)\cdot\sqrt{156{,}25}.$$

2. Se dă expresia:

$$E(x)=\frac{\left(15\frac{3}{4}-6{,}125:1\frac{3}{4}\right):\left(1\frac{2}{5}\cdot 1\frac{3}{7}+4{,}25\right)\cdot x}{\left[\left(\sqrt{146{,}41}:1\frac{5}{6}-\frac{2\cdot 5^5}{2^3\cdot 5^5}\cdot 611\right):\frac{1}{4}\right]\cdot x-4}$$

Se cere:

1) Să se aducă la forma cea mai simplă.

2) Să se afle pentru ce valori ale lui x, $E(x)=\frac{1}{2}$.

3. Se dă expresia:

$$E(x)=\left(\frac{\frac{x^2-1}{x+1}}{x+1}+\frac{x+1}{\frac{x^2-1}{x+1}}\right)\cdot\left(\frac{2x^3+2x}{4x^2}+1\right)\cdot\frac{2x}{2x^2+2}$$

Se cere:

1) Să se aducă la forma cea mai simplă.

2) Să se afle valoarea numerică pentru:

$$x=\frac{10-8\left\{0.46+\frac{1}{24}-\left[\frac{19}{3}-(6+0.0675:1.215)\right]\right\}}{3.9\,986+\frac{1}{10}\sqrt{0.000196}}.$$

4. Se dă expresia:

$$E(x)=\frac{1-\frac{4x}{(x+1)^2}}{\frac{x}{x+1}-\frac{1}{1-x}-\frac{2x}{x^2-1}}$$

Se cere:

1) Să se aducă la forma cea mai simplă.

2) Pentru ce valoare a lui x această expresie are valoarea numerică egală cu $\frac{7}{8}$.

5. Să se afle valoarea lui x pentru care avem:

$$\frac{\left[5\sqrt{1.447209}-3\frac{7}{16}:\left(1{,}5-\frac{23{,}5}{36{,}5}\right)\right]\cdot x}{\left[1.45+8\frac{8}{11}-4\frac{1}{4}:(1-11{,}7:26)\right]\cdot x-3}=\frac{2}{3}.$$

6. Să se demonstreze egalitatea:

$$\left[\frac{1}{\frac{a+b+1}{2}-\frac{1}{a+b-1}}+\frac{1}{\frac{a+b-1}{2}-\frac{1}{a+b+1}}\right]\cdot\frac{1-\frac{3}{(a-b)^2+4ab}}{\frac{4}{a+b}}=1.$$

7. Să se demonstreze egalitatea:

$$\frac{\left[\frac{(a+b)^2+b^2}{a^3-b^3}-\frac{1}{a-b}+\frac{a+b}{a^2+ab+b^2}\right]\cdot\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)}{\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\cdot\frac{1}{a^2+2ab+b^2}+\frac{2}{a^3+b^3+3ab(a+b)}\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right):\frac{a-b}{ab}}=a\cdot b.$$

8. Se dă ecuația:

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\left(x-\frac{1}{4}\right)^2-\left(x-\frac{1}{5}\right)^2=\left(3x+\frac{1}{10}\right)^2-\left(3x+\frac{1}{6}\right)^2.$$

Se cere să se pună sub o formă mai simplă, descompunînd diferențele de pătrate în produse de factori și apoi să se rezolve.

9. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2(a^2+b^2)}{a^2-b^2} \\ \frac{1}{y}-\frac{1}{x}=\frac{4ab}{a^2-b^2} \\ x-y=2z. \end{cases}$$

10. Să se arate că:

$$\frac{x^8-x^6+6x^4+4x^2+1}{x^4-3x^3+4x^2-2x+1}=x^4+3x^3+4x^2+2x+1.$$

11. Să se simplifice fracția:

$$\frac{x^2+y^2+1-2xy+2x-2y}{x^2-y^2-1+2y}.$$

12. O cooperativă agricolă de producție are două loturi cu o suprafață de 200 ha și 45 ha, care au fost semănate cu porumb. Să se afle cîte hectare s-au prășit într-o săptămînă din fiecare lot, dacă din primul lot s-a prășit cu 80 ha mai mult decît $\frac{4}{5}$ din al doilea și mai rămîn în primul lot de 5 ori mai multe hectare neprășite decît în al doilea lot.

13. Într-un an o cooperativă agricolă de producție a recoltat de pe două loturi 440 t de grîu. În anul următor, recolta de grîu s-a mărit cu 60% pe primul lot și cu 75% pe al doilea lot, recoltîndu-se 743 t de grîu. Să se afle cît s-a recoltat în anul următor de pe fiecare lot.

14. O cooperativă agricolă de producție are cu 800 ha pămînt mai mult decît o altă cooperativă. A doua cooperativă a semănat cu grîu $\frac{2}{5}$ din terenul său, iar prima $\frac{2}{7}$ din teren. Știind că prima cooperativă a semănat cu 120 ha mai mult decît a doua, să se afle cîte hectare cu grîu a semănat fiecare cooperativă agricolă de producție.

15. Trei mecanici dintr-o uzină, pentru depășirea planului trimestrial, au primit un premiu de 3 600 de lei. Să se afle cît a primit fiecare mecanic, dacă primul a primit 175%, iar al doilea 125% din cît a primit al treilea mecanic.

16. În două ateliere ale unei fabrici de textile s-au ţesut într-o lună 8 000 m de pînză, realizîndu-se norma prevăzută. Organizînd mai bine munca, muncitorii din primul atelier au depăşit norma cu 15%, iar cei din al doilea atelier cu 20%. În trei luni, atelierul al doilea a depăşit pe primul cu 3420 m de pînză ţesuţi. Să se afle care era norma pentru fiecare atelier şi cu cît a fost depăşită în cele trei luni de ambele ateliere.

17. Doi muncitori lucrînd împreună pot face o lucrare în 12 ore; dacă ar lucra separat, primul muncitor ar termina lucrarea cu 10 ore înaintea celuilalt. În cîte ore ar fi terminat lucrarea fiecare muncitor lucrînd singur.

18. Pe razele OA şi OB ale unui sfert de cerc AOB ca diametru se construiesc semicercurile ACO şi OCB (C fiind punctul de intersecţie al celor două semicercuri). Să se demonstreze că:

1) Dreapta OC este bisectoarea unghiului AOB.

2) Punctele A, C şi B sînt coliniare.

3) Arcele AC, CO şi CB sînt egale.

19. Se consideră un unghi xOy. Pe bisectoarea exterioară se ia un punct M şi cu OM drept coardă se descriu două cercuri oarecare. Primul cerc taie laturile unghiului în B, respectiv C, iar al doilea în B' respectiv C'. Să se arate că $BB'=CC'$.

20. În triunghiul ABC se unesc punctele D şi E, mijloacele laturilor AB şi AC, apoi se duce DF perpendiculară pe BC. Cunoscînd $DE=10$ cm, $DF=5$ cm, unghiul $B=30°$, se cere să se afle laturile AB şi AC ale triunghiului ABC.

21. În triunghiul ABC se duce MP paralelă cu AC. Din punctul M, situat pe AB, se duce o paralelă la BC, care întîlneşte pe AC în N, iar din punctul P, situat pe BC, se duce o paralelă la AB, care întîlneşte pe AC în Q. Să se arate că $NC=AQ$.

22. Se dă un trapez isoscel, ale cărui laturi sînt tangente unui cerc de rază 3,4 cm, perimetrul trapezului fiind 34 cm. Să se calculeze laturile trapezului.

23. În triunghiul ABC se duce o dreaptă paralelă la mediana AD, care taie laturile AB şi AC (sau prelungirile lor) în E şi F. Să se arate că: $\frac{AE}{AF}=\frac{AB}{AC}$.

24. Se dă un triunghi dreptunghic ABC, înscris într-un semicerc O. Perpendiculara ridicată într-un punct M pe ipotenuză întîlneşte catetele în N şi P, iar semicercul în Q. Să se demonstreze că $MQ^2 = MN \cdot MP$.

25. Într-un dreptunghi $ABCD$ se duc două paralele EH şi FG, la egală distanţă de diagonala AC a dreptunghiului. Se cere să se demonstreze că figura $EHFG$ este paralelogram.

26. Suma dimensiunilor unui paralelipiped dreptunghic este egală cu 52 cm. Se cere să se afle volumul paralelipipedului, ştiind că dimensiunile sînt proporţionale cu numerele 1, 4, 8.

27. Un paralelipiped dreptunghic are aria laterală egală cu 650 cm^2, aria totală egală cu 722 cm^2 şi înălţimea egală cu 25 cm. Se cere să se verifice că aria totală a paralelipipedului este egală cu suma pătratelor celor trei dimensiuni ale sale.

28. Să se calculeze dimensiunile şi aria laterală a unui paralelipiped dreptunghic, cunoscînd suma celor trei dimensiuni egală cu 13 cm, aria totală egală cu 88 cm^2 şi volumul egal cu 32 cm^3.

29. O magazie a unei cooperative agricole de producţie are forma unui paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile: lăţimea egală cu soluţia ecuaţiei $(x-4)^3-(2x+1)^3+(2x+3)^3-(x+4)^3=90$, lungimea este de 2,4 ori mai mare decît lăţimea, iar înălţimea cu $7\frac{1}{2}$ mai mică decît suma celor două dimensiuni. Conţinutul magaziei este $\frac{50}{61}$ din volumul său. Ştiind că masa hectolitrică a grîului este 80 kg, se cere masa în tone a grîului din magazie.

30. O piramidă dreaptă are baza un romb. Suprafaţa rombului este egală cu rădăcina pozitivă a ecuaţiei $2(x+3)(x-3)+x^2-\frac{285x}{8}-\frac{27}{2}=2(x^2-9)$. Una din diagonalele rombului este egală cu dublul celeilalte, iar înălţimea piramidei este egală cu diagonala mare a rombului. Să se afle volumul.

31. O bară de fier de forma unui paralelipiped dreptunghic are ca bază un pătrat cu latura 7,2 cm şi un volum egal cu 5,6 dm^3. Această bară dată la strung este transformată într-un cilindru terminat prin

două emisfere cu diametrul de 7,2 cm, înălțimea barei rămînînd aceeași. Să se calculeze masa barei, știind că densitatea fierului este 7,8 g/cm³.

32. Într-o sferă cu raza de 17 cm se fac două secțiuni prin plane paralele la distanțele de 8 cm și 15 cm de centrul sferei. Să se calculeze volumul trunchiului de con care are ca baze cele două cercuri de secțiune.

33. Dintr-o bară metalică de formă cilindrică cu diametrul 28 cm se strunjește o piesă care se compune dintr-un cilindru, un trunchi de con și un con (suprapuse în ordinea indicată). Înălțimea cilindrului exprimată în decimetri este egală cu soluția ecuației

$$\frac{(2x-3)^2+7}{7}+\frac{x(x+1)}{14}-\frac{5x-18}{10}=\frac{(3x+2)(3x-2)}{14}+\frac{3}{35},$$

iar raza și generatoarea conului exprimate în centimetri sînt soluțiile x și y ale sistemului:

$$\begin{cases}\dfrac{4x-3y}{9}-\dfrac{2x-y}{3}=\dfrac{x-y}{6}-1\\[2ex]\dfrac{5x-2y+5}{4}-\dfrac{2x-y+5}{8}=3+\dfrac{x+y}{24}.\end{cases}$$

Știind că înălțimea trunchiului de con este $\frac{3}{5}$ din înălțimea cilindrului, iar baza mică a trunchiului de con este egală cu baza conului, se cere să se afle: 1) aria laterală a piesei; 2) volumul piesei.

34. Aria laterală a unui cilindru de rotație este 219,8 m², iar lungimea cercului bazei egală cu valoarea expresiei:

$$E=\frac{45\frac{1}{5}+1{,}025:\left(\frac{5}{8}\right)^2+40\frac{12}{125}}{5\frac{1}{4}-4{,}7089+0{,}23:\frac{1}{4}}.$$

Să se afle volumul cilindrului.

35. Un cilindru de rotație se desfășoară pe un plan după un dreptunghi ale cărui diagonale sînt egale cu 6 cm și fac un unghi de 60°. Să se calculeze volumul cilindrului.

36. Secțiunea axială a unui con de rotație are unghiul de la vîrf de 90° și aria egală cu 36 cm². Să se calculeze aria laterală, aria totală și volumul.

37. Secțiunea axială a unui trunchi de con are bazele 8 cm și 18 cm, iar unghiul format de o latură neparalelă cu baza mare este de 45°. Să se calculeze volumul trunchiului de con

38. Baza unei piramide este un trapez isoscel cu înălțimea de 4 m și laturile neparalele de cîte 5 m. Înălțimea piramidei este 6 m, iar volumul 88 m³. Să se afle bazele trapezului.

39. O piramidă are ca bază un romb cu diagonala mică de 18 m Înălțimea piramidei este 21 m, iar volumul ei 1 512 m³. Să se calculeze latura rombului.

40. Aria laterală a unui cilindru de rotație este egală cu suma ariilor bazelor. Știind că volumul cilindrului este egal cu 3 140 m³, să se calculeze raza și generatoarea.

41. Înălțimea unui con de rotație este 15 m, iar suma generatoarei. și razei este 25 m. Să se calculeze aria laterală și volumul conului.

42. Să se calculeze volumul unui con de rotație, știind că, dacă mărim raza conului cu 2 m și micșorăm generatoarea cu 3 m, aria laterală nu se schimbă, iar dacă lăsăm raza neschimbată și mărim generatoarea cu 5 m, aria totală se dublează.

43. Un coș de fabrică în formă de trunchi de con înalt de 30 m are diametrul exterior la bază 3,6 m și la vîrf 2,4 m. Diametrul interior al coșului este pe toată înălțimea egal cu 1,6 m. Să se afle masa coșului, știind că un metru cub de zidărie cîntărește 1 800 kg.

44. Să se efectueze și să se simplifice expresia:

$$E(a,\ b)=\frac{\frac{1}{a^2b^2}-\frac{1}{(a+b)^2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)}{\frac{1}{a^2b^2}+\frac{1}{(a+b)^2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)+\frac{2}{ab\,(a+b)^2}}.$$

45. Să se calculeze volumul și aria laterală a unui con, știind că înălțimea conului este cu 10 dm mai mare decît diametrul bazei, iar $\frac{1}{4}$ din înălțime este cu 1 m mai mică decît raza bazei.

46. Pe un teren orizontal în formă de triunghi dreptunghic avînd cateta $AB=15$ m și ipotenuza $BC=17$ m se trasează un dreptunghi

$MNPA$, înscris în triunghi (M pe AB, N pe BC, P pe AC). Perimetrul dreptunghiului este 17,4 m. Pe acest contur se sapă un bazin în formă de paralelipiped dreptunghic avînd adîncimea 3,7 m. Să se afle capacitatea bazinului.

47. Se dă expresia:

$$E(x,y)=$$
$$=\left[\frac{2y^2}{x^2-y^2}+\frac{x+y}{2(x-y)}-\frac{x-y}{2(x+y)}\right]:\left(\frac{x^2+y^2}{2xy}-1\right)\cdot\frac{3x^3-9x^2y+9xy^2-3y^3}{3x+9y}$$

a) Să se aducă la forma cea mai simplă.

b) Să se afle valoarea numerică a expresiei pentru $x=\frac{1}{4}$, $y=\frac{4}{5}$.

48. În triunghiul ABC se cunosc laturile: $AB=5$ m, $BC=6$ m, $CA=7$ m. Se duce dreapta DE paralelă cu BC, astfel ca triunghiul ADE și trapezul $BDEC$ să aibă același perimetru. Să se afle lungimea segmentului DE și aria trapezului $BDEC$.

49. Pe baza AB a unui triunghi oarecare ABC se ia un punct oarecare P, prin care se duce o paralelă la mediana CM a triunghiului. Paralela dusă taie celelalte două laturi sau prelungirile lor în punctele D și E. Să se arate că $PD+PE=\text{const}$.

50. O piramidă cu baza un dreptunghi are perimetrul egal cu triplul înălțimii piramidei și lățimea bazei $\frac{3}{5}$ din lungime. Înălțimea piramidei este dată de soluția pozitivă a ecuației $x^2-\frac{16}{3}x-50=\frac{4x}{3}+14$. Să se afle aria totală și volumul piramidei.

51. Să se rezolve sistemele:

a)
$$\begin{cases}\frac{x}{5}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=11\\ \frac{x}{3}+\frac{y}{4}-\frac{u}{2}=1\\ \frac{y}{2}+\frac{z}{8}+\frac{u}{7}=6\\ x+y-z=11\end{cases}$$

b)
$$\begin{cases}-\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=a-\frac{z}{c}\\ \frac{x}{a}+\frac{z}{c}=b+\frac{y}{b}\\ \frac{y}{b}+\frac{x}{a}=c+\frac{z}{c}\end{cases}$$

52. Două brigăzi ale unei cooperative agricole de producție termină prășitul unei parcele în 4 zile. Să se afle în cîte zile termină lucrarea fiecare brigadă lucrînd singură, dacă brigăzii a doua îi trebuie cu 6 zile mai mult decît primei brigăzi.

53. O cooperativă agricolă de producție are de recoltat grîul de pe o suprafață de 960 ha. Dacă recoltează zilnic cu 40 ha mai mult decît era prevăzut în plan, termină cu 4 zile mai repede. Să se afle cîte hectare erau prevăzute în plan să se recolteze zilnic.

54. O piramidă are baza un romb cu un unghi egal cu 120°. Diagonala mare a bazei și înălțimea piramidei exprimate în centimetri sînt date de rădăcinile ecuației:

$$(5x+4)\ (5x-4)=(4x+1)^2-2(104{,}5-10x-4x^2).$$

Să se afle volumul piramidei.

55. Un trapez dreptunghic se rotește în jurul unei drepte perpendiculare pe cele două baze. Să se afle volumul și aria totală a corpului obținut, știind că suma bazelor este 73 dm: diferența lor este dublul bazei mici, iar aria trapezului este 972 dm².

56. Se dă ecuația:

$$\frac{\frac{2x}{3}-\frac{4x}{5}}{\frac{5}{3}}+\frac{6}{5}\left(\frac{2x}{3}-\frac{x}{5}\right)=\frac{72}{25}.$$

Se cere:

a) Să se rezolve ecuația.

b) Soluția ecuației exprimată în decimetri este raza unei sfere. Să se afle volumul și aria sferei.

c) Considerînd ca bază cercul mare al sferei, să se afle înălțimea conului care să aibă volumul egal cu volumul sferei și aria totală egală cu aria sferei.

57. Să se calculeze volumul unui con circular, știind că, dacă mărim raza cu 2 m și micșorăm generatoarea conului cu 3 m, obținem un con circular cu aria laterală egală cu a conului dat; iar dacă lăsăm neschimbată raza și mărim generatoarea cu 5 m, obținem un con circular cu aria totală egală cu dublul ariei conului dat.

58. Un dreptunghi cu perimetrul 34 cm se roteşte în jurul laturii mici. Ştiind că lungimea este cu 7 cm mai mare decît lăţimea, se cere:

a) Volumul şi aria cilindrului născut.

b) Volumul şi aria prismei patrulatere regulate înscrise în cilindru.

59. Un trapez dreptunghic are baza mică egală cu înălţimea. Aceasta este cu 20 cm mai mică decît baza mare, iar latura neperpendiculară pe baze este egală cu 52 cm. Se cere să se afle volumul şi aria corpului obţinut prin rotirea trapezului în jurul bazei mari.

60. Un triunghi dreptunghic cu catetele de 15 cm şi 20 cm se roteşte în jurul ipotenuzei. Să se afle aria şi volumul corpului născut.

61. Într-un trapez isoscel, baza mare este dublul bazei mici, înălţimea este 12 cm, iar suma bazelor este 54 cm. Să se afle volumul corpului născut prin rotirea trapezului în jurul bazei mari.

62. Se dă sistemul: $\begin{cases} \frac{3x+5y}{2} - \frac{2x-y}{3} = \frac{71}{6} \\ \frac{3(x-y)}{3} + \frac{2x+3y}{5} = \frac{22}{5} \end{cases}$

şi se cere:

a) Să se rezolve sistemul.

b) Soluţiile sistemului exprimate în centimetri şi luate în ordinea mărimii sînt egale cu înălţimea şi cu diferenţa bazelor unui trunchi de con circular. Să se afle volumul trunchiului de con, ştiind că aria laterală este $25\ \pi\ cm^2$.

63. Catetele unui triunghi dreptunghic sînt proporţionale cu numerele 3 şi 4. Jumătatea uneia dintre catete mărită cu $\frac{2}{3}$ din cealaltă şi cu încă 7 cm este egală cu suma lor mărită cu 1 cm. Să se afle volumul şi aria corpului născut prin rotirea triunghiului în jurul ipotenuzei.

64. Un trapez dreptunghic are aria egală cu $30\ cm^2$ şi înălţimea 4 cm. Corpul născut prin rotirea trapezului în jurul bazei mari are volumul $112\ \pi\ cm^3$. Să se afle:

a) Lungimea bazelor trapezului.

b) Aria corpului.

65. Un dreptunghi cu laturile a şi b se roteşte o dată în jurul lui a şi apoi în jurul lui b. Să se afle raportul volumelor corpurilor astfel formate.

Indicații și răspunsuri

Capitolul I

Introducerea literelor în calcule

6. a) $P=(2x+2y)m$; $A=xym^2$; b) $P=(10x+6)m$; $A=15x\ m^2$; c) $P=a+b+2d$; $A=\frac{(a+b)\cdot c}{2}$ **7.** a) $x^2+y^2+z^2$; b) $(x^3+y^3+z^3)^2$; c) $(x^2+y^2+z^2)^3$ **8.** a) $x+2x+z+\frac{z}{3}$; b) $\frac{x}{4}+\frac{z}{12}+\frac{2x}{5}+\frac{z}{5}$. **9.** $\frac{x}{2}+\frac{x}{4}+50+760$. **10.** $\frac{bc}{a}$ lei. **11.** a) $a=1\,180$; b) $x=3\,660$; c) $a=42\frac{5}{24}$; d) $a=927$; e) $a=8\frac{3}{8}$; f) $x=30\frac{56}{75}$; g) $a=2\,628{,}8$ h) $x=2{,}5$; i) $x=18\frac{583}{2\,580}$; j) $x=2\frac{139}{205}$. **12.** $18\frac{5}{8}$. **14.** a) 13,5; b) 11,25; c) $4\frac{11}{24}$. *Indicație:* media artimetică $x=\frac{a+b+c+d}{4}$; a) $x=\frac{9+16+4+25}{4}=13{,}5$. **15.** a) 20; b) 80; c) 12; d) 0,015. *Indicație:* media geometrică $x=\sqrt{a\cdot b}$; a) $x=\sqrt{16\cdot 25}=20$. **17.** *Indicație:* $985-463=985-(400+60+3)=985-400-60-3=522$. **18.** *Indicație:* $12\cdot 15=(10+2)(10+5)=(10+2+5)\cdot 10+2\cdot 5=$

$=170+10=180$ **19.** *Indicație:* $580\cdot95=580(90+5)=580\cdot90+580\cdot5=$ $=52\,200+2\,900=55\,100$. **20.** $a=b+8$: $a-b=8$; $a-8=b$. **21.** Considerăm parcela un întreg. Primul tractorist ară într-o zi $\frac{1}{x}$, iar al doilea tractorist $\frac{1}{y}$ și în patru zile vor ara $4\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$ ha. **22.** 1) $\frac{5}{x}$ ha; 2) 64 ha; 80,15 ha. **23.** a) 38 kg; b) 88 kg; c) nu are sens. **24.** a) $x=8$; b) $y=4$; c) $x=5$;

d) $\begin{matrix} x=1 & x=2 & x=3 & x=4 & x=5 & x=6; \\ y=6 & y=5 & y=4 & y=3 & y=2 & y=1 \end{matrix}$

e) $\begin{matrix} x=5 & x=6 & x=4 & x=3 & x=2 & x=1. \\ y=3 & y=1 & y=5 & y=7 & y=9 & y=11 \end{matrix}$

25. Se notează baza cu x și una din laturile egale este $3x=3,12=36$ **cm.** $x=12$ cm.

26. Se notează cu x zilele lucrate de primul muncitor și se obține egalitatea $ax=(a+b)(x-c)$. Se află 21 de zile și 18 zile.

Capitolul II

Numere pozitive și negative

A. Numere întregi

6. -15; $+2$; $+10$. **7.** 1 500 t, 1200 t; $+3\%$. **8.** $+85$ de piese, 145 piese, 290 piese, 510 piese; 110 de piese. **9.** *a)* $+12$; *b)* -9; *c)* $+6$; *d)* 0.

B. Operații cu numere întregi

Adunarea

23. -8; 24. $+7$; 25. $+7$; 27. *a)* $+9$; *b)* -4; *c)* -2; *d)* $+39$. **28.** *a)* -1; *b)* -4; *c)* $+9$; *d)* $+1$; *e)* -3; *f)* -5; *g)* 0; *h)* $+6$; *i)* 0; *j)* -10.

Scăderea

32. *a)* $6°$; *b)* $23°$; *c)* $3°$; *d)* $20°$. **33.** *a)* $+8$; *b)* -5; *c)* $+15$. **34.** -8; -6; $+14$; -18. **35.** *a)* -14; *b)* -21; *c)* $+10$; *d)* -3. **36.** *a)* $+7$; *b)* -11; *c)* 0; *d)* $+2$. **37.** *a)* 17; *b)* -7; *c)* 1; *d)* -9. **38.** *a)* 17; *b)* -9; *c)* 3; *d)* 7; *e)* 74; *f)* -54; *g)* 147. **39.** *a)* 4; *b)* 22; *c)* 1; *d)* -8; *e)* 11; *f)* 48; *g)* -18; *h)* $+11$; *i)* -23; *j)* -19.

Înmulțirea

43. *a)* -80; *b)* 55; *c)* -12; *d)* -40; *e)* 200; *f)* 48; *g)* -8; *h)* 0. **44.** *a)* $3\,500$; *b)* -450; *c)* -480; *d)* $-18\,000$; *e)* $300\,000$; *f)* $35\,000$. **45.** *a)* 15; *b)* 0; *c)* 136; *d)* -15; *e)* 11; *f)* 2. **48.** *a)* 60; *b)* 56; *c)* 312; *d)* 20; *e)* -1; *f)* 32.

Ridicarea la putere

49. *a)* -6; *b)* 27; *c)* -3. **50.** 22, 100, 16, 2, -28, -80. **51.** *a)* -12; *b)* 90; *c)* -63; *d)* -600; *e)* $-6\,712$; *f)* $80\,606$. **52.** 674.

Împărțirea

53. 5; -6; -4; -3; $-1\frac{2}{3}$; $1\frac{3}{4}$. **54.** -4; -6; 3; $\frac{2}{5}$; 15; $-1\frac{2}{3}$ **55.** 5; -2; 2. **56.** *a)* $7\frac{2}{3}$; *b)* -8; *c)* 1; *d)* 5. **57.** *a)* $-7\frac{1}{8}$; *b)* 18; *c)* -3; *d)* 4; *e)* 3.

C. Fracții cu numărătorul și numitorul numere pozitive sau negative

67. $-\frac{2}{5}$; $-\frac{3}{8}$; $+\frac{1}{3}$; $+\frac{7}{9}$; $-\frac{-4}{5}$. 68. $-\frac{3}{4}$; $+\frac{1}{4}$; $-\frac{2}{3}$; $-\frac{1}{4}$; $-\frac{2}{3}$; $-\frac{1}{3}$; $+\frac{11}{36}$. 69. *a*) $\frac{3}{4}$; *b*) $-\frac{11}{18}$; *c*) $3\frac{3}{5}$; *d*) $24\frac{3}{10}$. 70. *a*) -1; *b*) -6; *c*) $\frac{3}{4}$. 72. *a*) $-2\frac{3}{4}$; *b*) $2\frac{6}{12}$; *c*) $-\frac{7}{8}$; *d*) $-8\frac{2}{3}$; *e*) $1\frac{5}{24}$; *f*) $-\frac{8}{9}$. 73. *a*) $\frac{5}{16}$; *b*) $-\frac{4}{7}$; *c*) $\frac{15}{28}$; *d*) $\frac{3}{32}$; *e*) $-\frac{1}{6}$. 74. *a*) $-\frac{5}{18}$; *b*) $-\frac{2}{9}$; *c*) $1\frac{1}{5}$. 76. *a*) $24\frac{1}{4}$; *b*) $1\frac{1}{2}$; *c*) $3\frac{7}{10}$; *d*) $-18\frac{11}{15}$. 77. *a*) $-1\frac{7}{8}$; *b*) $+1\frac{1}{2}$; *c*) $1\frac{1}{5}$; *d*) 0; *e*) imposibilă; *f*) -10; *g*) $-1\frac{19}{36}$; *h*) $-\frac{11}{18}$; *i*) $-2\frac{7}{24}$. 78. *a*) $-1\frac{7}{8}$, *b*) -10; *c*) $-1\frac{1}{2}$; *d*) -5. 79. *a*) $-24\frac{1}{4}$; *b*) $-19\frac{15}{16}$; *c*) -13. 80. *a*) 2; *b*) 5; *c*) 14. *d*) $-\frac{22}{81}$. 81. *a*) $-10\frac{14}{17}$; *b*) $-17\frac{2}{3}$; *c*) $113\frac{3}{4}$; *d*) 8; *e*) $2\frac{14}{25}$; *f*) $-22\frac{793}{1631}$; *g*) $4\frac{269}{289}$.

Capitolul III

Calcul algebric

A. Valoarea numerică a expresiilor algebrice

2. -35; $-3\frac{1}{2}$. 3. $136\frac{16}{27}$. 4. $\frac{109}{162}$. 5. 1. 6. 1 020. 7. 63,7. 8. -2, $-\frac{14}{57}$. 9. $1\frac{1}{6}$. 10. 97. 11. $1\frac{5}{6}$, 2, 3. 12. -1. 13. *a*) 3; *b*) $-\frac{1}{3}$. 14. 1.

15. 1) $x \in (1; +\infty)$, $x \in (-5; +\infty)$, $x \in (-3; +\infty)$; 2) $x \in (-\infty; 1)$, $x \in (-\infty; -5)$, $x \in (-\infty; -3)$; 3) $x=1$, $x=-5$, $x=-3$. **16.** $x \in (1; +\infty)$, $x \in (-\infty; 1)$, $x=2n+1$ (număr impar), $x=1$.

B. Monoame. Operații cu monoame

22. *a*) $6x^2$; *b*) 0; *c*) $5a^2b$. **23.** *a*) $-\frac{1}{4}ab-\frac{1}{6}a^2b$; *b*) $-\frac{7}{8}xy^2+\frac{3}{8}x^2y$; *c*) -2, $6xy+0$, $4y-5$, $2x^2$. **24.** *a*) $12x^2+13a^2b+7xy^2$; *b*) $-6x^2y+4x-3y-17a^2b$; *c*) $-\frac{1}{4}x^2$; *d*) $-\frac{37}{10}a^2b+m-20t^4$. **25.** $8x$. **26.** *a*) $-4x^2y$; *b*) $\frac{5}{8}x^4y^7$; *c*) $-4\frac{1}{12}a^3b^2c^2$; *d*) $-x^3yz^5$. **27.** *a*) $2\frac{1}{2}abc$; *b*) $-2\frac{1}{4}a^3b$; *c*) $-6a^6b^3c^5$; *d*) 0. **28.** 65,5 m; 26,2 m. **29.** *a*) $-\frac{2}{5}x^2y$; *b*) $-1\frac{2}{3}x^2$; *c*) $-4xy$; *d*) $\frac{4}{5}ay$; *e*) $-\frac{1}{2}x^3y$; *f*) $-\frac{2}{3}x^5y^3z^2$; *g*) $-2\frac{2}{3}x^4$; *h*) $-\frac{3}{4}x^2yz$; *i*) $-\frac{1}{12}xy^2$; *j*) $-3(x+y)$; *k*) $24(x-y)^2$; *l*) $-5(x-y)^2$.

30. *a*) $2ab$; *b*) $2a^2b^3c$; *c*) $-9\frac{11}{15}x^2y^2$; *d*) $\frac{1}{2}(x+1)^3-xy^2+4(y-5)^{2m+3}$.

32. *a*) $2x^6y^3$; *b*) $-20xy$; *c*) $-3x^{11m-5}y^{12m-10}$; *d*) $3(x+y)^{2m+1}$; *e*) $5a^2b^2+52a^3$; *f*) $8(2a+b)^{3n}-9(a+3b)^{4p}$.

C. Polinoame operații cu polinoame

34. *a*) 2, 3; *b*) 2, 1, 3; *c*) 4, 3; *d*) 5, 2, 2; *e*) 6, 3, 1. **40.** *a*) $2x^2+x-3$; *b*) -2; *c*) $7x^2-6ax$; *d*) $a^4-4a^3b+12a^2b^2-3ab^3+9ab$; *e*) $2\frac{1}{12}x^2+2\frac{7}{12}xy-7\frac{1}{4}y^2$; *f*) $1\frac{5}{12}a^3+15\frac{1}{6}a^2b+2\frac{1}{4}ab^2-7\frac{2}{3}b^3$; *g*) $x^4+1{,}1x^3y+0{,}68x^2y^2+1{,}5xy^3-y^4$; *h*) $1{,}18a^3-1{,}3a^2-3{,}6a+1{,}23$.

41. *a*) x^2-2y; *b*) x^2y+7xy^2; *c*) $4x^2+2x+3$; *d*) $1\frac{1}{6}x+1\frac{1}{6}y-\frac{9}{20}z$; *e*) $-\frac{1}{14}x^2+y^2-\frac{3}{5}x$; *f*) $-2\frac{1}{3}x^3+2\frac{1}{4}xy^2-2\frac{2}{3}x^2y-2\frac{1}{2}y^3-\frac{1}{3}$. **42.** *a*) $x^3-4x^2-3xy-3y^2-x+2y+1$; *b*) $x^3+6x^2-13xy+7y^2-3x+6y+17$; *c*) $-x^3+5xy+7y^2-9x+2y-7$; *d*) $-x^3-2x^2+11xy-11y^2+13x-10y-11$. **43.** *a*) $-2x^2+2$; *b*) $5x^2+x$; *c*) a^2-b^2; *d*) $x-7y+12z+yz$; *e*) $-4x+13y$; *f*) $20a^2-3a$; *g*) $-11a-b+5c$; *h*) $-11x^2-x+8y$. **44.** $10x-4y$. **45.** Indicație. Se notează cu x una din laturile egale. **R**: 15 cm, 15 cm, 18 cm. **49.** *a*) $-20y+30z$; *b*) $-32ab+40a$; *c*) $-9a-6b+15c$; *d*) $6a^2-8a-16$; *e*) $-20x^3-35x^2+5x-10$; *f*) $-\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}c$. **50.** *a*) $-6x^3-8xy+4x^2$; *b*) $16x^4y-10x^2y^3+12x^2y^2+2xy^3$; *c*) $8x^5y^2-12x^4y^2+12x^3y^2-4x^2y^2$; *d*) $30x^3y^4-48x^4y^5-18x^5y^6+12x^2y^3$; *e*) $-20a^5x^3y^6+35a^2x^3y^4-15a^3x^2y^2+5a^4x^5y^2-10a^2xy$; *f*) $2a^3+3a^2+4a$; *g*) $-x^5-3x^4-4x^3+\frac{1}{3}x^2$; *h*) $-2\frac{1}{2}x^4y-5x^2y^2+2x^2y+2x^3y^3-5xy$; *i*) $\frac{11}{6}x^4y^2+1\frac{1}{2}x^2y^2-2\frac{1}{3}x^3y^4-2x^3y$; *j*) $-a^3b^2+0{,}3a^4b^3-0{,}15a^5b^3$; *k*) $-5{,}4x^3y+3{,}6x^4y^4-6xy^3$; *l*) $x^3y^2-2x^2y^3-1\frac{1}{9}xy^4-1\frac{1}{3}xy$. **51.** *a*) $16x^2-6xy-6x+3y^2$; *b*) $8x^3-103xy$; *c*) $-42a^2+38ab-6a+4$; *d*) $2{,}3x^2y-0{,}42xy^3-x^2y^3-2y^2+20xy$; *e*) $-0{,}7a^3-3{,}78a^2+1{,}95a-5{,}76$; *f*) $-4x+12$; *g*) $-18x^3-40a^2x^4+3x^2+12ax^2+6x$. **52.** *a*) $12a^4-14a^2b^2-20b^4$; *b*) $7x^4y^2-13x^2y^3-24y^4$; *c*) $6a^4-19a^3b+13a^2b^2-2ab^3$; *d*) $10x^5+5x^4y+15x^3y^2+20x^2y^3-2x^3y-x^2y^2-3xy^3-4y^4$; *e*) $4a^6+16a^5+15a^4-8a^3-6a^2+9a-2$; *f*) $2x^6-7x^5+6x^4-4x^3+5x^2+x-1$; *g*) $\frac{1}{12}x^2+\frac{7}{24}xy+\frac{1}{72}xz-\frac{55}{144}yz+\frac{1}{6}y^2-\frac{1}{6}z^2$. **53.** *a*) $b-1$; *b*) $11a-6b-7ab+2b^2+4+6a^2$; *c*) $-36a+22b+21ab-6b^2-16-18a^2$; *d*) $5a-3b-1+12a^2-14ab+4b^2$; *e*) $9a-5b+6a^2-7ab+3+2b^2$; *f*) $-42a+25b-12a^2+14ab-4b^2-21$. **54.** *a*) $x+2$; *b*) $53y-82$; *c*) $7x+14$. **55.** *a*) $8x+2$; *b*) $-31x-31$; *c*) $2x+5$; *d*) $27x$. **56.** *a*) $24x^3-14x^2y-11xy^2+6y^3$; *b*) $6x^7-x^5+12x^4-x^3-2x^2-2$; *c*) a^8+a^4+1; *d*) $-28x$; *e*) $19y^3$. **57.** 56 kg. 30 kg, 48 kg.

67. a) $9y^2-1$; b) $25a^2-4b^2$; c) $25x^4-y^2$; d) $16x^4-4y^4$; e) $16x^6y^4-9x^4y^2$; f) a^8-9; g) $\frac{1}{9}x^2-\frac{1}{4}y^2$; h) $\frac{4}{9}a^4x^2-\frac{16}{25}b^2x^4$; i) $\frac{25}{4}x^2y^2-\frac{9}{16}y^2$; j) $0{,}04x^2-0{,}25y^2$; k) $0{,}09a^4x^2-\frac{1}{9}a^4y^6$. **68.** a) a^4-b^4; b) $1-x^4$; c) $81a^4-16b^4$; d) $625x^4-1$; e) $81a^4b^4-16a^4$; f) $6x+13$. **69.** a) $(2x+3y)(2x-3y)$; b) $(3ax-2ay)(3ax+2ay)$; c) $(8a^2y-1)(8a^2y+1)$; d) $(9x^2y+7)(9x^2y-7)$; e) $\left(\frac{1}{5}x+\frac{3}{8}y\right)\left(\frac{1}{5}x-\frac{3}{8}y\right)$; f) $\left(0{,}3x^2+\frac{2}{5}y\right)\left(0{,}3x^2-\frac{2}{5}y\right)$; g) $(0{,}4a+0{,}12b)(0{,}4a-0{,}12b)$. **70.** a) $(5x+2x^2+1)(5x-2x^2-1)$; b) $(5a+2)(a+2)$; c) $(5x+6)(x+4)$; d) $(9y-1)(-y+5)$; e) $(3x+2)(2-x)$; f) $(5z+2)(5z+3)$; g) $(x+1)(15x-11)$; h) $b(4a+5b)$; i) $3(m^2+4mn+5n^2)(5m^2+12mn+3n^2)$. **71.** f) $\frac{x^2}{9}+\frac{xy}{6}+\frac{y^2}{16}$; g) $49x^2+2\frac{4}{5}xy+\frac{1}{25}y^2$; h) $13\frac{4}{9}a^2+10\frac{4}{15}ab+1\frac{24}{25}b^2$; i) $3\frac{1}{16}x^8y^4+5\frac{5}{6}x^7y^4+2\frac{7}{9}x^6y^4$; j) $1\frac{24}{25}a^{10}b^6+1\frac{3}{25}a^8b^5+0{,}16a^6b^4$; k) $11\frac{1}{9}x^{12}y^4+2\frac{2}{5}x^{10}y^5+0{,}1296x^8y^6$. **72.** g) $\frac{9}{25}a^{10}b^2-\frac{4}{5}a^8b^5+\frac{4}{9}a^6b^8$; h) $\frac{4}{9}x^6y^8-3\frac{1}{3}x^8y^5+6\frac{1}{4}x^{10}y^2$; i) $1\frac{24}{25}a^4b^6-1\frac{3}{25}a^5b^5+0{,}16a^6b^4$; j) $1{,}44x^4y^2-1{,}2x^5y^3+0{,}25x^6y^4$; k) $6{,}25x^4y^6-x^5y^4+0{,}04x^6y^2$.

73. g) $\left(a-\frac{1}{2}b\right)^2$; h) $\left(\frac{3}{5}a^5b^2+\frac{2}{3}a^3b^4\right)^2$; i) $\left(\frac{3}{5}a^2b-\frac{2}{3}a^3b^3\right)^2$.

76. a) $17x^2+38x+16$; b) $5x^2+22x-4$; c) $-25a^4b^2-10a^3b-a^2-b^2$; d) $4\frac{1}{9}x^4-3\frac{11}{15}x^2y+\frac{13}{25}y^2+1$. **78.** h) $\frac{1}{216}x^6y^3-\frac{1}{24}x^5y^3+\frac{1}{8}x^4y^3-\frac{1}{8}x^3y^3$; i) $64a^3-16a^2b+\frac{4}{3}ab^2-\frac{1}{27}b^3$; j) $0{,}064a^{12}-\frac{8}{25}a^8b^3+\frac{8}{15}a^4b^6-\frac{8}{27}b^9$. **79.** k) $(2x^3-1)^3$; l) $\left(4x+\frac{1}{3}y\right)^3$; m) $(x+1)^3$. **80.** *Indicație;* $9^3=(10-1)^3$, $8^3=$

$=(10-2)^3$ etc. **81.** e) $\left(v+\frac{1}{2}b\right)\left(a^2-\frac{1}{2}ab+\frac{1}{4}b^2\right)$; f) $\left(\frac{1}{3}a^2+\frac{1}{5}b\right)\left(\frac{1}{9}a^4-\right.$ $\left.-\frac{1}{15}a^2b+\frac{1}{25}b^2\right)$; g) $(0{,}5x+0{,}5y)(0{,}25x^2+0{,}25y^2-0{,}25xy)$. **82.** e) $\left(\frac{1}{4}x-\frac{3}{6}y\right)\cdot$ $\left(\frac{1}{16}x^2+\frac{3}{24}xy+\frac{9}{36}y^2\right)$; f) $(0{,}2y-0{,}1z)(0{,}04y^2+0{,}02yz+0{,}01z^2)$. **83.** c) $(4y-x)\cdot$ $(7y^2+xy+x^2)$; d) $4x(4x^2+3)$; e) $2y(27x^2+y^2)$. **84.** a) $2x^2+2y^2$; b) $4xy$; c) $-4a^2+24ab+9b^2$; d) $-2x^2-8x-1$; e) $7y^2-52y+112$; f) $-x^2-16x+$ $+48$; g) a^2+3x^2+2a-7; h) $47x^2+180xy-113y^2$; i) $16x^3y-16xy^3$; j) $29x^2-10x+225$; k) $a^6-10a^4+27a^2-11$; l) $3a^4+3a^8$; m) $-9a^4+27a^2-$ -54; n) $7x^3+20x^2-3x+14$. **85.** a) $81x^4+54x^3-6x-1$; b) $256a^4-384a^3+$ $+216a-81$; c) a^3+8b^3; d) a^6-125b^3; e) $8x^3-64y^3$; f) $81x^4-16$; g) $729a^6-64$; h) $64a^6-1$.

Împărțirea polinoamelor

89. a) $-3x+2y-1$; b) $3b+4c-1$; c) $-3y+2z$; d) $-2x+2\frac{1}{2}y$; e) $3xy^2+2y$; f) $-2xy^2-4$; g) $3a^2+4ax+x^2$; h) $-3x^2+2ax+5a^2$; i) $4a^2-16x+2$; j) $3x^3-9x^2+12x$; k) $-12a^2-12a+2$; l) $-16y^2-$ $-24y+4$; m) $10\frac{2}{3}y+2\frac{2}{3}xy-8x^2y^2$; n) $4x^2-6axy^2+10a^2y$; e) $-6x^2-$ $-\frac{2}{3}xy^3+y^4$; p) $-1\frac{1}{4}a^5-2a^2x+1\frac{1}{2}x^2$; r) $5a^3+20a^2-30a-40$; s) $-a^3+$ $+2a^2-4a-0{,}02$; ș) $(x+y)^2-3(x+y)-6$; t) $2(x-1)^3-(x-1)^2+4(x-1)$. **90.** a) 2; b) 4; c) 2; d) $3x-3y$; e) $6x-4$; f) $4x-12$; g) $10x-2a$; h) $2x-6a$; i) $2x+2a$; j) $3a^2+5a-7$; k) $y-7$; l) a^2-ab; m) $4a^2-2ab+6b^2$; n) $5x^2+3x-10$. **91.** a) $2x^2+x-4$; b) x^2+4x+4 rest $-8x-7$; c) $3x^2-$ $-5ax$; d) $4x^2-3xy$; e) $2x^2-3x+1$; f) $3x^2-7xy+2y^2$; g) $a^2-2ab-7b^2$; h) $3x^2-2ax+5a^2$; i) $a^2-2ab+3b^2$; j) $x^2-2xy+3y^2$. **92.** a) $x-y$; b) $5a+2b$; c) $\frac{1}{2}a-1$; d) $4a^2-6b$; e) $4a^2-2a+1$; f) $3a^2+2b$; g) $16x^2+$ $+20xy+25y^2$; h) *Indicație:* $a^2-6a+9=(a-3)^2$, $(a-3)^2:(a-3)=a-3$; i) $a+2y$; j) $a-3$. **93.** a) $a-8$ rest -25; b) 0; c) -2.

Descompunerea polinoamelor în factori ireductibili

98. a) $6ab^2(a^2c+2)$; b) $16a^4bx(ab^2-4)$; e) $5xy^2\left(\frac{1}{6}x^2+2\right)$;

d) $3a^3b\left(\frac{1}{4}+3a\right)$; e) $5x^2y(3xy+2-4y^2)$; f) $5a^3b^2(2ab-3a+4b^2)$;

g) $4axy(3x+2a^2x^2y^2-6a+1)$; h) $(x-2)(a+b-1)$; f) $(x-1)(4a-$
$-2b+c+1)$; j) $(a-b)\cdot(x+y+z)$; k) $(y-a)^5(a+y)^2$; l) $4z(z-2)(z-1)^2$;
m) $x^m(5+2x+7x^2-11x^{2m})$; n) $y^{2n}(8+11y^3-15y+23y^{-1}+19y^{-3})$.

99. a) $(a+b)(x+y)$; b) $(a+b)(x-y)$; c) $(a+b)(a+c)$; d) $(x+y)(a+x)$;
e) $(x+3)(x^2+3)$; f) $(2a-b)(x+5y)$; g) $(2x-1)(15a-17b)$; h) $3(x-y)^2$
i) $(1+x)(x+x^3+x^5)$; j) $(a-b)(x^2+x-1)$; k) $x(x-1)(a+b+c)$.

100. a) $\left(\frac{4}{5}a^2b-3ab\right)\left(\frac{4}{5}a^2b+3ab\right)$; b) $\left(0{,}4a+\frac{1}{7}b\right)\left(0{,}4a-\frac{1}{7}b\right)$;

c) $\left(0{,}8a^3b-\frac{2}{9}a^2b\right)\left(0{,}8a^3b+\frac{2}{9}a^2b\right)$; d) $\left(\frac{20}{11}x+\frac{25}{11}y\right)\left(\frac{2}{11}x+\frac{19}{11}y\right)$;

e) $(5a^2-b)^2$; f) $(3x-5y)^2$; g) $(2x^2y+1)^2$; h) $(4xy-5x)^2$; i) $\left(\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}y\right)^2$

j) $\left(3xy-\frac{1}{2}y\right)^2$; k) $(3x+2)^3$; l) $(2a^2+5)^3$; m) $(4-2a)^3$; n) $(a+6)^3$;
o) $(3a+5b)(9a^2-15ab+25b^2)$; p) $(x-4y)(x^2+4xy+16y^2)$;
r) $\left(5x-\frac{1}{2}y\right)\left(25x^2+\frac{5}{2}xy+\frac{1}{4}y^2\right)$. **101.** a) $3x(y+1)^2$; b) $12x^3y(x+1)^2$;
c) $[3ab(a-b)]^2$; d) $(x+y+1)(x+y-1)$; e) $(2a-5b-6)(2a-5b+6)$;
f) $(5x-2a+3b)(5x+2a-3b)$; g) $(x+1)^2(x-1)(x^2-x+1)$; h) $(x+y+$
$+z+t)(x+y-z-t)$; i) $x(m-n)(mx+nx-1)$; j) $-20(a+y)(3a+y)$;
k) $(2x+3)(40x^3+180x^2+288x+135)$. **102.** a) $2x(x-1)^3$; b) *Indicație*:
Se grupează termenii cîte doi și se obține: $(4x+5)(4x-5)^2$;
c) $(x-1)^3(x+1)$; d) $(a^2+1)(a-1)^2$; e) $4(2b+a)(3b-a)$; f) $5(x^2-1)(a^2-1)$;
g) *Indicație*: Polinomul se scrie $(a-b)^2+ab^2+a-a^2b-b$, se grupează
termenii și se obține $(a-b)(a-b-ab+1)$; h) Se descompune a^3+b^3
și se obține $13(7x-3y)(x^2+3y^2)$. **103.** a) $10a^2b^2$, $120a^3b^3$; b) $12a^2b^2x^4$
$144a^3b^3x^5$; c) $3ab$, $18a^3b^3$; d) $2ax$, $240a^2x^2y$; e) $x-y$, $x(x-y)^2$, f) $x-1$,

$-5(x^2-1)$; g) $x-2$, $11x(x^2-4)$; h) $x+2{,}4(x-2)(x+2)^2$; i) $x+1$, $12(x-1)(x+1)^2$; j) $a+b$, $(a-b)(a+b)^2$; k) $a-1$, $8(a-1)^2(a+1)(a^2+a+1)$; l) $x+2$, $7(x+2)^2(x-2)(x^2-2x+4)$; m) $2x-3a$, $2(2x-3a)^2(4x^2+6ax+9a^2)$.

Capitolul IV

Fracții algebrice

7. a) $\frac{2}{3}$; b) $\frac{1}{35}$; c) $\frac{2y}{3}$; d) $\frac{y}{2}$; e) $\frac{2a}{3b^2}$; f) $\frac{2a}{3xy}$; g) $\frac{a}{3}$; h) $\frac{1}{2x}$; i) y; j) $\frac{ab^3c^2}{4}$; k) $\frac{2}{3x^2y^2}$; l) $\frac{1}{2x^2y^4}$; m) $\frac{4}{9ax}$. 8. a) $\frac{1}{3x}$; b) $\frac{ab^2}{3}$; c) $\frac{1}{a+b}$; d) $a-b$; e) $\frac{1}{a+b}$; f) $-\frac{2a}{3b}$; g) $-\frac{2x^2}{3y^4}$; h) $\frac{a-b}{2a}$; i) $\frac{x+y}{2x}$. j) $\frac{x-y}{2(a+b)}$; k) $\frac{1}{3}$; l) 4; m) $\frac{a+b}{a-b}$; n) $\frac{x}{x+y}$; o) $\frac{b}{1-b}$; p) $\frac{x^2}{x+2}$; r) 2; s) 3. 9. a) $\frac{x+3}{x(x-3)}$; b) $\frac{2}{3xy}$; c) $\frac{1}{a+1}$; d) $a-2$; e) $\frac{a^2+x}{a-x}$; f) $\frac{3x+2y}{9x^2-6xy+4y^2}$; g) $2x-5a$; h) $\frac{1}{2(2x+1)}$; i) $\frac{3a-1}{2}$; j) $\frac{3(a-2)}{2(a+1)}$; k) $\frac{1}{(a-1)(a^2-a+1)}$; l) $\frac{(x-a)(x^2+a^2)}{a(x+a)}$; m) $\frac{mx+x+4}{m-1}$.

10. a) $\frac{7x}{9}$; b) $\frac{-y}{a}$; c) $\frac{5x^2-x}{5b}$; d) $-\frac{6x}{a+b}$; e) $\frac{3x}{a}$; f) $\frac{2a-3b}{m}$; g) $\frac{5x+3y+4}{3a}$; h) $\frac{1-x-a}{2t}$; i) $\frac{a-2}{2t-u}$; j) $\frac{x-y}{a-b}$. 11. a) $\frac{5m}{6}$; b) $\frac{x}{12}$; c) $\frac{2x-3y}{12}$; d) $-\frac{3a}{5}$; e) $\frac{74b-25}{36}$; f) $\frac{2x+15y}{6}$; g) $\frac{3t-6u+4}{4}$; h) $\frac{17x-14y}{14}$; i) $\frac{121a-132}{40}$

12. a) $\frac{11-25x}{28}$; b) $\frac{9-t-8n}{12}$; c) $\frac{8x+25b}{60}$; d) $\frac{22x+101y}{24}$; e) $-\frac{8a+11b-23c}{24}$; f) $\frac{y(x+3y)}{6}$. 13. a) $\frac{ax^2-bx-a}{x^2}$; b) $\frac{22x+9y}{12xy}$; c) $\frac{38ab-5ac-30bc}{24abc}$;

d) $\frac{3a^2-x^2+4}{6a^2x^2}$; e) $\frac{2}{x^2y}$; f) $\frac{13}{3(x+2)}$. **14.** a) $\frac{a^2+3a-4}{4(a+1)}$; b) $\frac{2b}{4a^2-b^2}$; c) $\frac{5b^2-2a^2}{ab(x+y)}$;

d) $\frac{2(3t+2)}{3(t+3)}$; e) $\frac{a+4b}{12(a+b)}$; f) $\frac{19x+6ax}{a^2-9}$; g) $\frac{-5a^2+18ab-12a-6b+3}{2a(a^2-9)}$;

h) $\frac{a^2+2a+2}{2a(a-1)(a+1)}$; i) $\frac{3(17x-5)}{2x(x^2-9)}$; j) $\frac{(y-x)(x-3y)}{xy(4x^2-9y^2)}$; k) $\frac{10a}{(a+2)^2(a-2)}$; l) $\frac{b+1}{5(b-4)^2}$;

m) $-\frac{14a^2-10}{(a+1)^2(a-1)^2}$; n) $\frac{3a^2+b^2}{a^2(a-b)}$; o) $\frac{b}{a}$. **15.** a) $\frac{2(a-b)}{a^2+ab+b^2}$;

b) $\frac{a+b+a^2-ab+b^2}{(a+b)(a^3+b^3)}$; c) $\frac{10}{8x^3-125}$; d) $\frac{x^2+a^2}{x^3-a^3}$; e) -1. **16.** a) $\frac{5x}{6}$; b) $\frac{4}{9xy}$;

c) $\frac{2ax}{2by}$; d) $\frac{5}{6a}$; e) $\frac{25b^2x^2}{6y^2}$; f) $\frac{6}{t}$; g) $\frac{3y}{2a}$; h) $\frac{2t}{bc^2}$; i) $\frac{4}{3a}$; j) $\frac{12a^2b}{5x^3y}$; k) $6ay$.

17. a) $\frac{a(a+b)}{3b}$; b) $\frac{3}{2(x+z)}$; c) $\frac{5}{9}$; d) $\frac{x+2y}{3}$; e) $\frac{x-y}{2xy}$; f) $\frac{x+2t}{5}$; g) $x-y$;

h) $\frac{(a+3)(a-5)}{a^2}$; i) $\frac{a-2b}{a^2}$; j) $1\frac{4}{5}$; k) $\frac{3}{m-n}$; l) $4(a+b)$; m) $\frac{x(x+2y)}{3}$;

n) $\frac{2}{x+y}$ **18.** a) $\frac{6a+1}{12(6a-1)}$; b) $\frac{x^2+y^2}{a+b}$; c) $\frac{1}{a-b}$; d) 1; e) $\frac{1}{2x-1}$.

19. a) $-\frac{x+y}{x-y}$; b) $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$; c) x; d) $-\frac{x}{a}$; e) $\frac{1}{x}$; f) $\frac{x+1}{x-1}$; g) 1;

h) $\frac{2xy}{x^2-y^2}$; i) $\frac{4(a-4)}{a}$; j) $\frac{2a^2}{(a-b)(a^2-ab+b^2)}$. **20.** a) $\frac{2x+y}{4}$; b) $2(3m-5n)$;

c) $\frac{3t^2-2u}{6}$; d) $13ax$; e) $\frac{2y-3t}{6ty}$; f) $\frac{6-4a+3b}{24ab}$; g) x^2-y^2; h) $-\frac{13a}{30}$.

21. a) $\frac{1-x}{1-2x}$; b) $6\frac{2}{3}$; c) $\frac{1-3n}{2(1+3n)}$; d) 4; e) $\frac{2x(y-2x)}{y+2x}$; f) $a-b$; g) $\frac{1}{x+5}$;

h) $\frac{2a}{3(a-4)}$; i) $\frac{t}{2t-1}$; j) $\frac{2x+3}{2}$; k) $\frac{x+1}{xy}$; l) 1; m) $a+b$; n) $\frac{1}{x+2}$;

o) $\frac{a^2-3a-6}{(a+1)(a-1)(a+3)}$; p) $\frac{2a-1}{a}$; r) 1. **23.** a) $x-xy+y$; b) $\frac{1}{8}$.

24. $\frac{1+x}{1+y}$.

Ecuații de gradul I

A. Ecuații de gradul I cu o necunoscută

11. *a)* 2; *b)* -6; *c)* -2; *d)* 1; *e)* -12; *f)* $2\frac{1}{2}$; *g)* 3; *h)* 4; *i)* 2. **12.** *a)* $-5\frac{2}{3}$; *b)* 4; *c)* $3\frac{2}{3}$; *d)* 9; *e)* -6; *f)* $-2\frac{1}{4}$; *g)* 0; *h)* 3; *i)* 1; *j)* 4; *k)* $-2{,}9$; *l)* 5; *m)* $9\frac{1}{2}$; *n)* $-\frac{2}{3}$. **13.** *a)* $\frac{3}{4}$; *b)* $-7\frac{1}{2}$; *c)* $\frac{21}{23}$; *d)* 23; *e)* 3; *f)* $6\frac{17}{21}$; *g)* 3; *h)* -1; *i)* -3; *j)* 6; *k)* $-2\frac{4}{29}$; *l)* 2. **14.** *a)* $\frac{4}{11}$; *b)* 0; *c)* $-\frac{1}{2}$; *d)* 4; *e)* 5; *f)* -1; *g)* 1; *h)* 1; *i)* -1; *j)* 5; *k)* 8; *l)* $\frac{7}{8}$; *m)* 3. **15.** *a)* $\frac{a-3}{a}$; *b)* 3; *c)* 6; *d)* $-\frac{4a}{5-c}$; *e)* $\frac{5b}{2(1-2a)}$; *f)* 1; *g)* $\frac{3a-4}{2a-1}$; *h)* $-\frac{a+b}{a-b}$; *i)* $a+b$; *j)* $\frac{a-b}{3}$; *k)* $\frac{3}{4}ab$. **16.** a) $\frac{b-a}{4}$; b) a; c) $\frac{a^2b}{a+b}$; d) $\frac{2a}{c+d}$; e) $-b$; f) $\frac{b^2+2b}{2a-2b+1}$; g) $\frac{a-b}{2}$; h) $\frac{2m}{3}$; i) $-\frac{a^2}{b}$; j) $2b$; k) $\frac{2-a^2}{a}$; l) $7a$; m) $\frac{a-b}{2}$; n) $\frac{1}{a^2+a+1}$.

17. a) 15; b) 7;

c) Nu are soluție deoarece $x=0$ anulează numitorul; *d)* 10.

18. *a)* -38; *b)* 1. **19.** $4\frac{2}{7}$. **20.** 10. **21.** 38.

22. *a)* Imposibilă; *b)* imposibilă; *c)* nedeterminată; *d)* imposibilă; *e)* nedeterminată, iar pentru $x=2$ este imposibilă; *f)* imposibilă, iar pentru $x=1$ ecuația nu are sens.

23. a) $t>5$; b) $t>-1$; c) $t>1$; d) $t<0$; 24. a) $5<m<3$; b) $1<m<0$; c) $1<m<2$ în afară de $m=1{,}5$; d) $-2<m<1$; e) $m>-10$. 25. a) $m\neq 4$ determinată (soluție unică), $m=4$ imposibilă; b) $m\neq 3$ determinată, $m=3$ imposibilă; c) m ia orice valoare și ecuația e determinată; d) $m=1$ nedeterminată; e) $m=1$ nedeterminată, $m=-9$ imposibilă; f) $x=\frac{2(m+1)}{m+1}$. Pentru $m\neq -1$ obținem $x=2$. Această valoare nu verifică ecuația dată, deoarece nu are sens pentru $x=2$. Pentru $m\neq -1$ ecuația nu are soluție. Pentru $m=-1$ ecuația este nedeterminată, fiind verificată pentru orice valoare numerică dată lui x în afară de 2 și 3.

B. Probleme de gradul I cu o necunoscută

33. 10. 34. 13, 14, 15; 35. 44, 36, 16. 36. 3, 37. 12; 38. 36. 39. 6, 7, 8, 9. 40. 248. 41. 5 m, 10 m. 42. 6 m, 10 m. 43. 60°, 45°, 75°. 44. 10 dm. 45. 19 ha, 17 ha, 14 ha. 46. 11 000 de tractoare în anul 1959, 15 836 de tractoare în anul 1964. 15 951 de tractoare în anul 1965. 47. 30 m, 25 m. 48. 36 288 kg, 50 400 kg, 73 140 kg. 49. 7,5 milioane tone laminate, 10,5 milioane tone oțel; 1,1 milioane tone țevi. *Indicație*: x=milioane tone laminate; $1\frac{2}{5}x$=milioane tone oțel; $x-6{,}4$= milioane tone țevi; $x+\frac{7x}{5}+x-6{,}4=19{,}1\rightarrow x=7{,}5$. 50. 36 m, 12 m și 9 m. 51. 138,3 t de semicocs, 174,3 t de fontă, 60,4 t de piese turnate. 52. 4 049 de tractoare în anul 1938, 65 000 de tractoare în anul 1963, 97500 tractoare în anul 1965. 53. 5 200 mii tone de grîu-secară, 7 600 mii tone de porumb. 54. 880 de lei în anul 1950, 2 640 de lei în anul 1959, 4 000 de lei în anul 1963. 55. 36 570 t de fontă, 60 140 t de oțel, 40 220 t de laminate. 56. *Indicație*: Se notează cu x numărul locomotivelor Diesel realizate în anul 1965. Avem ecuația $\frac{x-25}{x}=\frac{17}{22}$. Obținem: 110 locomotive în anul 1965, 85 de locomotive în anul 1964. 57. Clasa a V-a —101 elevi, clasa a VI-a —96 de elevi, clasa a VII-a —93 de elevi, clasa a VIII-a —105 de elevi. 58. 240 m de pînză, 160 m de mătase. 59. 1 120 de lei, 894 de lei, 298 de lei. 60. 12 lei, 40 de lei, 16 lei. 61.

Indicație: Fie x ha terenul repartizat pentru grîu, $\frac{2x}{5}$ ha terenul repartizat pentru porumb și $\left(\frac{2x}{5}-40\right)$ ha terenul repartizat pentru zarzavat. Ecuația este $x-\left(\frac{2x}{5}+\frac{2x}{5}-40\right)=120$. Obținem: 400 ha pentru grîu, 160 ha pentru porumb, 120 pentru zarzavat. **62.** a) 20 ha de ardei, 100 ha de varză, 60 ha de roșii; b) 141 000 kg de ardei, 1 356 000 kg de varză, 712 800 kg de roșii. **63.** 3 610 t, 2 910 t, 541 t. **64.** $2\frac{26}{31}$ m, $3\frac{63}{155}$ m, $2\frac{86}{155}$ m. **65.** *Indicație:* Notăm cu x numărul litrilor de apă curată. Avem ecuația $\frac{40+x}{3.4}=\frac{40}{2}$; 28 kg. **66.** 85 kg. **67.** 36 cm, 44 cm. **68.** 50 cm. **69.** 51,75 m³. **70.** 100 m, 120 m. **71.** *Indicație:* Fie x numărul zilelor. Avem ecuația $\frac{3}{2}(185-15x)=237-18x$. 9 zile. **72.** *Indicație:* Fie x numărul zilelor în care trebuie terminată lucrarea după plan. Avem ecuația: $(x-3)56=50x+120$. 2 100 de butuci. **73.** 56 de muncitori. **74.** *Indicație:* Fie x numărul tractoriștilor din prima brigadă. Ecuația este $[8x+(35-x)\cdot 10]19=6\,004$. 17 tractoriști, 18 tractoriști, 2 584 ha, 3 420 ha. **75.** 48 ha, 12 ha. **76.** *Indicație:* Fie x numărul orelor parcurse la dus. Avem $8x=\left(x+\frac{1}{8}\right)\cdot 9-3$. 15 km, 18 km. **77.** *Indicație:* Fie x metri sîrmă folosiți pentru primul sat. Avem ecuația: $x+x-16+\left(\frac{5x}{8}+\frac{3x}{2}\right)=208$. $54\frac{10}{33}$ m, $38\frac{10}{33}$ m, $33\frac{31}{33}$ m. **78.** 61,5 t; 72,5 t; 74 t. **79.** 455 km, 130 km, 175 km, 150 km. **80.** *Indicație:* Fie x hectare suprafața terenului, $\left(\frac{x}{2}+2\right)$ ha arate în prima zi, $\left(\frac{x-4}{8}+6\right)$ ha arate a doua zi. Ecuația este: $\frac{x}{2}+2+\frac{x-4}{8}+6=x$. 20 hectare suprafața terenului. **81.** 1 406,25 lei, 393,75 lei. **82.** 1 800 ha suprafața, 600 ha suprafața pentru vii și grădini, 450 ha suprafața pentru grîu, 360 ha suprafața pentru orz, 300 ha suprafața pentru porumb. **83.** *Indicație:* Considerăm capacitatea bazinului un întreg. Avem ecuația $2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{8}-\frac{1}{x}\right)+18\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{x}\right)=1$, unde $x=12$. 12 ore primul robinet, 24 de ore al doilea robinet. **84.** 30 de lei. **85.** 115,101 miliarde.

C. Sisteme de două ecuații de gradul I cu două necunoscute cu coeficienți numerici și literali

93. a) $x=5$, $y=5$; b) $x=125$, $y=-47$; c) $x=1$, $y=-1$; d) $x=1\frac{1}{3}$, $y=-1\frac{2}{21}$; e) $x=6$, $y=0$; f) $x=\frac{3}{4}$, $y=-\frac{5}{6}$. 94. a) $x=-1\frac{1}{3}$, $y=1$; b) $x=8\frac{25}{28}$, $y=-11\frac{13}{14}$; c) $x=2$, $y=-1$; d) $x=1$, $y=2$; e) $x=0{,}8$, $y=3{,}2$; f) $x=18$, $y=12$; 95. a) $x=\frac{5}{7}$, $y=\frac{6}{7}$; b) $x=4$, $y=2$; c) $x=-3$, $y=1$; d) $x=-19$, $y=-3$; e) $x=2$, $y=2$; f) $x=21$, $y=1$; g) $x=-1\frac{7}{25}$, $y=-1\frac{12}{25}$; h) $x=44$, $y=16$; i) $x=3$, $y=1$; j) $x=7$, $y=5$; k) $x=7$, $y=8$; l) $x=40$, $y=50$; m) $x=15$, $y=10$; n) $x=8$, $y=6$; o) $x=30$, $y=12$; 96. a) $x=8$, $y=9$; b) $x=5$, $y=3$; c) $x=3$, $y=6$; d) $x=36$, $y=12$; e) $x=5$, $y=-3$; f) $x=-3$, $y=4$; g) $x=4$, $y=-3$; h) $y=5$, $z=6$; i) $x=3$, $y=1$; j) $x=\frac{21}{103}$, $y=2\frac{28}{103}$; k) $x=3$, $y=2$; l) $x=-1\frac{12}{41}$, $y=\frac{33}{41}$. 97. a) $x=\frac{68}{75}$, $y=-\frac{34}{51}$; b) $x=1\frac{35}{43}$, $y=-5\frac{12}{43}$; c) $x=17$, $y=13$; d) $x=8$, $y=52$; e) $x=17$, $y=28$; f) $x+y>0$, $x=30$, $y=18$; g) $x=12$, $y=5$, h) $x-y>0$, $x=5$, $y=4$. 98. a) $x=a+b$; $y=a-b$; b) $x=a$; $y=2a$; c) $x=\frac{2}{5a}$, $y=\frac{23}{5b}$; d) $x=a+2b$, $y=2a+b$; e) $x=a$, $y=a+b$; f) $x=a$, $y=b$; g) $x=a+b$; $y=a-b$. 99. a) $x=\frac{21a-10b}{5}$, $y=\frac{20b-9a}{5}$; b) $x=\frac{a^3-a+1}{a^2-1}$, $y=\frac{1}{a(1-a^2)}$, $x=\frac{a+b}{ab}$, $y=\frac{a-b}{ab}$; d) $a>0$, $b>0$, $a>b$, $x=a(a+b)$, $y=b(a-b)$; e) $a>0$, $b>0$, $a>b$, $x=\frac{a}{a-b}$, $y=\frac{b}{a+b}$; f) $a>0$, $b>0$, $a>b$, $x=b(a-b)$, $y=a(a-b)$; g) $a>0$, $b>0$, $a>b$, $x=\frac{a+b}{2}$,

$y=\frac{a-b}{2}$; h) $a>0$, $b>0$, $a>b$, $x=2a+b$, $y=2a-b$. **100.** a) $x=-1$, $y=6$, $z=5$; b) $x=4$, $y=-2$, $z=-3$; c) $x=6$, $y=-10$, $z=1$; d) $x=2$, $y=3$, $z=1$; e) $x=4$, $y=2$, $z=5$; f) $x=3$, $y=7$, $z=4$; g) $x=6$, $y=5$, $z=2$; h) $x=12$, $y=7$, $z=4$; i) $x=10$, $y=8$, $z=6$. **101.** a) $x=51$, $y=76$, $z=1$; b) $x=12$, $y=60$, $z=60$; c) $x=9$, $y=12$, $z=15$; d) $x=26$, $y=65$, $z=91$; e) $x=\frac{2}{3}$, $y=\frac{4}{5}$, $z=1$; f) $x=0{,}8$, $y=-2$, $z=\frac{3}{7}$; g) $x=2$, $y=1$, $z=4$; h) $x=a+b$, $y=b+c$, $z=c+a$.

D. Rezolvarea problemelor cu ajutorul sistemelor de ecuații

110. 330, 210. **111.** 3 800, 50. **112.** 51 m. 33 m. **113.** 38, 5. **114.** 72, 72. **115.** 217, 55. **116.** $\frac{8}{11}$. **117.** 25 de lei, 15 lei. **118.** 29 de lei, 94 de lei: **119.** 485 kg de zahăr tos, 97 kg de zahăr cubic. **120.** *Indicație:* Fie x lei salariul primului muncitor și y lei salariul celui de-al doilea muncitor. Avem sistemul: $\frac{x}{y}=\frac{8}{11}$, $\frac{x+80}{y+100}=\frac{11}{15}$, care se rezolvă și se află: $x=800$ lei, $y=1\,100$ lei. **121.** 840 ha, 576 ha. **122.** $20\frac{7}{4}$ kg, $21\frac{3}{7}$ kg: **123.** $\frac{4}{5}$. **124.** 340 t, 275 t. **125.** 127 de studenți în anul 1946, 640 de studenți în anul 1954, 926 de studenți în anul 1960, 1 587 de studenți în anul 1964. **126.** 809 356 de aparate de radio, 231 296 de televizoare, 162, 788 de frigidere, 214, 554 de mașini de spălat rufe. **127.** 2,5 milioane de bovine, 2,4 milioane de porcine, 6,4 milioane de ovine. **128.** 60,12. **129.** *Indicație:* Fie x vîrsta primului elev și y vîrsta celuilalt elev. Sistemul este: $x=2\,[y-(x-y)]$, $x+x+(x-y)=36$. 16 ani, 12 ani. **130.** 5 000 tone porumb, 11 500 tone legume, 3 300 tone grîu, 1 850 tone floarea soarelui. *Indicație:* $x=$tone porumb, $y=$tone legume, $\frac{x\cdot 66}{100}$ tone grîu, $\frac{33x}{50}$: 1, $(783)=\frac{37x}{100}$ tone floarea-soarelui, $(y-500)$ tone sfeclă de zahăr, $x+\frac{33x}{50}+\frac{37x}{100}+y-500+y=32\,650$, $x+y=16\,500$,

$x=5\,000$, $y=11\,500$. **131.** 14 t, 18 t. **132.** 80 de întreprinderi, 170 de secţii noi. **133.** 6 000 de autobasculante, 4 800 de remorci, 7 200 de alte vehicule, **134.** 5 400 m, 6 000 m. **135.** *Indicaţie:* x=kwh pe cap de locuitor în 1938, y=kwh pe cap de locuitor în 1968, $33\,(3)\cdot x$=kwh pe cap de locuitor în 1975, $\frac{y}{33.(3)\,x}=\frac{181}{480}$, $33,(3)x-y=1\,495$, $x=72$ kWh, $y=905$ kWh. **136.** 209 000 t, 2 286 000 t, 2 946 000 t, 10 267 000 t. **137.** a) 133 mii tone, 846 mii tone, 1 706 mii tone; *b)* 284 mii tone, 1 420 mii tone, 2 704 mii tone. **138.** 9 băieţi, 7 fete. **139.** 24 de maşini peste plan prima uzină, 16 maşini peste plan a doua uzină. **140.** a) 105 ore, 210 ore, 420 ore; b) 60 ore. **141.** 160 t, 190 t. **142.** 220 t, 184 t. **143.** $70\frac{10}{17}$t, $169\frac{7}{17}$t. **144.** 448 de piese, **145.** a) 2 200 de piese, 2 800 de piese; b) 330 de piese, 308 de piese. **146.** 300 ha, 900 ha. **147.** 2 robinete cu debitul de 230 l pe oră, 5 robinete cu debitul de 300 l pe oră. **148.** 512 cm³. **149.** *Indicaţie:* Fie x greutatea aurului din aliaj şi y greutatea argintului. Avem prima ecuaţie $x+y=200$. Aplicînd principiul lui Arhimede, se obţine a doua ecuaţie: $\frac{x}{19,5}+\frac{y}{10,5}=$ $=15$; 29,08 g, de aur, 107,92 g de argint. **150.** *Indicaţie:* Considerăm terenul un întreg. Fie x numărul zilelor în care prima brigadă ar termina prăşitul terenului, lucrînd singură şi y numărul zilelor în care brigada a doua prăşeşte terenul lucrînd singură. Avem sistemul:

$4\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=1$, $2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)+\frac{1}{y}=1$, 6 zile, 12 zile. **151.** 48 de ore, 24 de ore. **152.** 18 ore, 12 ore. **153.** 40 de zile, 40 de zile. **154.** *Indicaţie*: Se notează laturile triunghiului cu x, y, z, $x=12$, $y=14$, $z=20$. **155.** 4, 7, 11, 9. **156.** *Indicaţie*: Fie x lei premiul, y lei premiul primit de primul tehnician şi z lei premiul primit de al doilea tehnician. Avem sistemul: $y+z+3\,000=x$,

$y=\frac{x}{2}-\frac{3}{22}(z+3\,000)$, $z=\frac{x}{4}+\frac{1}{56}(y+3\,000)$, 9 500 de lei, 4 000 de lei, 2 500 de lei, 3 000 de lei. **157.** 18 m³/h, 27 m³ oră, 9 m³ oră. **158.** 22 000 t de fontă, 21 000 t de oţel, 13 500 t de laminate finite, 47 000 t de cărbune, 38 500 t de minereu de fier marfă.

Inecuații de gradul I cu o necunoscută

8. $P_1 \supset P_2$, $P_2 \subset P_1$, $P_3 \supset P_4$. **10.** $N \supset M$, $N \cup M = N$, $N \cap M = M$. **11.** $M_1 \cup M_2 = N$ mulțimea numerelor naturale, $M_1 \cap M_2 = \varnothing$ mulțimea vidă. **12.** a) $M_1 \cup M_2 \cup M_3 = \left\{-15, -11, -8, -1, -0{,}5, 0{,}2, \frac{5}{2}, 4\right\}$; b) $M_1 \cap M_2 = M_2$, $M_1 \cap M_3 = \varnothing$, $M_2 \cap M_3 = \varnothing$. **13.** *Indicație:* Se vor da valori pozitive și negative lui a, b, c, d și se vor interpreta rezultatele obținute. **14.** *Indicație:* Se vor verifica inegalitățile date cînd $a>1$, $b>1$ și $0<a<1$, $0<b<1$, iar m un număr întreg pozitiv. **16.** $a<b$. **17.** Se consideră inecuația care conține pe celelalte. Astfel: a) $x>4$, dă $x \in (4, +\infty)$ etc. **18.** a) $x \in (5, +\infty)$; b) $x \in (-\infty, 3)$; c) $x \in \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$; d) $x \in \left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$. **19.** a) $x \in (-\infty, 4)$; b) $x \in (-\infty, 3)$; c) $x \in (-\infty, -6)$; d) $x \in (-\infty, 3)$. **20.** a) $x \in (5, +\infty)$, b) $x \in (-\infty, 1)$ c) $x \in (2, +\infty)$; d) $x \in (2, +\infty)$; e) $x \in \left(-\infty, -\frac{10}{3}\right)$; f) $x \in \left(-\infty, -\frac{14}{5}\right)$. **21.** a) $x \in (-12, +\infty)$; b) $x \in \left(-\infty, \frac{15}{2}\right)$; c) $x \in (-\infty, 2)$; d) $x \in (-\infty, 4)$; e) $x \in (-\infty, 4)$ pentru $b>0$; f) $x \in (1, +\infty)$ dacă $\frac{a+b}{ab}>0$; $x \in (-\infty, 1)$ dacă $\frac{a+b}{ab}<0$. **22.** a) $x \in \left(-\infty, \frac{7}{2}\right)$; b) $x \in (-\infty, -2)$; c) $x \in \left(-\infty, \frac{9}{4}\right)$; d) $x \in (36, +\infty)$; e) $x \in (120, +\infty)$; f) $x \in \left(-\infty, \frac{257}{220}\right)$. **23.** a) $x \in (-\infty, -3) \cap (-\infty, -1) = (-\infty, -3)$; b) $x \in (-\infty, 4) \cap (1, +\infty) = (1, 4)$; c) $x \in (1, +\infty) \cap \left(\frac{3}{2}, +\infty\right) = \left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$; d) $x \in (3, +\infty) \cap (-\infty, 19) = (3, 19)$. **24.** a) $x \in \left(-\infty, -\frac{4}{3}\right) \cap \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) =$

$=\left(-\infty,-\frac{4}{3}\right)$; b) $x \in (-\infty,4] \cap (1,+\infty)=(1,4]$; c) $x \in [3,+\infty) \cap$ $\cap (2,+\infty)=[3,+\infty)$; d) $x \in (-\infty,-1) \cap [-1,+\infty)=\varnothing$; e) $x \in (6,+$ $+\infty) \cap (-\infty,2)=\varnothing$; f) $x \in (-\infty,1) \cap (-\infty,3]=(-\infty,1)$. 25. a) $x \in$ $\left(-\infty,21\frac{8}{13}\right) \cap \left(-\infty,-\frac{3}{2}\right)=\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right)$; b) $x \in (4,+\infty) \cap (10,+\infty)=$ $=(10,+\infty)$; c) $x \in [2,+\infty) \cap (-\infty,46]=[2,46]$; d) $x \in \left(\frac{14}{13},+\infty\right) \cap$ $\cap \left(\frac{5}{44},+\infty\right)=\left(\frac{14}{13},+\infty\right)$; e) $x \in \left(-\infty,2\frac{2}{7}\right) \cap (-\infty,-1)=\left(-\infty,-2\frac{2}{7}\right)$.

Capitolul VII

Funcţii

9. Funcţiile date sînt drepte paralele cu axa x-lor, cu axa y-lor şi axele de coordonate. 10. Funcţiile $f(x)=x$ şi $f(x)=-x$ sînt bisectoare la axele de coordonate. 14. d) $y=3$. 21. Funcţiile trebuie să fie egale, adică $3x-2=2x+3$, de unde $x=5$. 30. După ce s-au reprezentat grafic funcţiile, se măsoară coordonatele punctelor de intersecţie, care trebuie să verifice calculul. 32. *Indicaţie*: Se vor da valori pozitive variabilei x. 33. *Indicaţie*: Valorile pozitive vor constitui un tabel de variaţie pentru ramura din cadranul I, iar valorile negative vor constitui un tabel de variaţie pentru ramura din cadranul III.

Ecuații de gradul II

1 a) $x_1=0$, $x_2=2$; b) $x_1=0$, $x_2=-3$: c) $x_1=0$, $x_2=3$; d) $x_1=0$, $x_2=-3$; e) $x_1=0$, $x_2=36$; f) $x_1=0$, $x_2=1\frac{1}{12}$. 2. a) $x_{1,2}=\pm 2$; b) $x_{1,2}=\pm 2$; c) $x_{1,2}=\pm 6$; d) $x_{1,2}=\pm\sqrt{2}$; e) $x_{1,2}=\pm 3\sqrt{2}$; f) $x_{1,2}=\pm 2\sqrt{-3}$; g) $x_{1,2}=\pm\sqrt{-25}$; h) $x_{1,2}=\pm\frac{1}{3}\sqrt{2}$; i) $x_{1,2}=\pm\frac{3}{4}$; j) $x_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{48}{5}}=\pm\pm\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$. 3. a) $x_1=0$, $x_2=-1$; b) $x_1=0$, $x_2=-1$; c) $x_{1,2}\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$; d) $x_{1,2}=\pm\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{1}{3}}$; e) $x_1=0$, $x_2=-\frac{1}{3}$; f) $x_1=0$, $x_2=1\frac{2}{3}$; g) $x_1=0$, $x_2=-\frac{5}{14}$; h) $x_{1,2}=\pm\frac{2}{3}$; i) $x_{1,2}=\pm\sqrt{-\frac{1}{2}}$. 4. a) $x_{1,2}=\pm 16$; b) $x_{1,2}=\pm\frac{5}{9}$; c) $x_{1,2}=\pm\frac{5}{3}$; d) $x_{1,2}=\pm 78$; e) $x_{1,2}=\pm\frac{7,8}{3}$; f) $x_1=0$, $x_2=4\frac{1}{5}$; g) $x_1=0$, $x_2=4$; h) $x_{1,2}=\pm 18$; i) $x_1=0$, $x_2=\frac{2}{5}$. 5. a) $x_{1,2}=\pm 1$; b) $x_{1,2}=\pm 5$; c) $x_1=0$, $x_2=4$; d) $x_1=0$, $x_2=-4$. 6. a) $x_1=0$, $x_2=-\frac{2b}{a}$; b) $x_1=0$, $x_2=\frac{1}{a-b}$; c) $x_{1,2}=\pm\frac{1}{ab}$; d) $x_{1,2}=\pm(a+b)$; e) $x_{1,2}=\pm\frac{2(a-b)}{\sqrt{6}}$; f) $x_{1,2}=\pm 1$; g) $x_1=0$, $x_2=\frac{3a}{2}$; h) $y_1=0$, $y_2=\frac{1}{a+b}$; i) $y_1=0$, $y_2=\frac{3b}{2}$. 7. a) $x_1=3$, $x_2=-1$; b) $x_1=2$, $x_2=5$; c) $x_1=-4$, $x_2=-3$; d) $x_1=2$, $x_2=6$; e) $x_1=-3$, $x_2=-3$; f) $x_1=x_2=5$; g) $x_1=-8$, $x_2=6$; h) $x_1=7$, $x_2=-4$; i) $x_1=x_2=-1$; j) $x_1=-1$, $x_2=9$; k) $x_1=1$, $x_2=\frac{1}{2}$; l) $x_1=3$, $x_2=\frac{2}{5}$. 8. a) $x_1=\frac{2}{3}$, $x_2=\frac{1}{2}$; b) $x_1=-3$, $x_2=\frac{2}{5}$; c) $x_1=5$, $x_2=-\frac{3}{4}$; d) $x_1=-\frac{1}{2}$, $x_2=-\frac{1}{2}$;

e) $x_1 = -\frac{5}{6}$, $x_2 = \frac{2}{3}$; f) $x_1 = \frac{5}{7}$, $x_2 = -\frac{1}{2}$; g) $x_1 = 1+\sqrt{2}$, $x_2 = 4$;

h) $x_1 = \sqrt{2}$, $x_2 = \sqrt{2}$. 9. a) $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{5}$; b) $x_1 = x_2 = \frac{7}{3}$; c) $x_1 = -\frac{1}{4}$,

$x_2 = -\frac{3}{2}$; d) $x_1 = \frac{2}{3}$, $x_2 = -\frac{1}{4}$. e) $x_1 = 0{,}7$, $x_2 = 0{,}3$; f) $x_1 = -\frac{1}{5}$,

$x_2 = -\frac{4}{5}$. 10. a) $x_1 = \frac{9}{2}$, $x_2 = \frac{1}{2}$; b) $x_1 = 3$, $x_2 = -9$; c) $x_1 = x_2 = 4$;

d) $x_1 = 44$, $x_2 = -2$; e) $x_1 = 2$, $x_2 = -2$. 11. a) $x_1 = -3$, $x_2 = 8$; b) $x_1 = 4$,

$x_2 = -7$; c) $x_1 = 7$, $x_2 = -\frac{7}{9}$; d) $x_1 = 2$, $x_2 = -\frac{1}{2}$, e) $x_1 = -2$,

$x_2 = -3$; f) $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{2}{13}$. 12. a) $x_1 = a$, $x_2 = 2a$; b) $x_1 = 3a$, $x_2 = 5a$;

c) $x_1 = -2b$, $x_2 = 3b$; d) $x_1 = \frac{a}{2}$, $x_2 = \frac{2a}{3}$; e) $x_1 = -\frac{a}{3}$, $x_2 = \frac{2a}{5}$;

f) $x_1 = a+b$, $x_2 = a-b$; g) $x_1 = 2+ab$, $x_2 = 3$; h) $x_1 = \frac{2a+b}{2}$, $x_2 = \frac{2a-b}{3}$;

i) $x_1 = a + \frac{1}{a}$, $x_2 = a - \frac{1}{a}$; j) $x_1 = \frac{ab}{a-b}$, $x_2 = \frac{ab}{a+b}$; k) $x_1 = (a+b)^2$, $x_2 = (a-b)^2$ 13. Se calculează realizantul şi după valoarea sa se arată natura rădăcinilor la fiecare ecuaţie. 14. $k \in (-\infty, 4)$, $m \in \left(-\infty, -\frac{5}{2}\right)$.

15. a) $+6$; b) 36; c) 4; d) 1; e) $+12$, -12; f) $\frac{13}{14}$; g) $2, -\frac{1}{5}$; h) $\frac{1}{5}$.

16. a) -8; b) -5; c) $\frac{16}{7}$; d) 15; e) $a^2 - b^2$; f) $-2a$. 23. Primul număr este 20 şi -12, al doilea număr este 12 şi -20. 24. 11 şi 12, -12 şi -11. 25. 5 şi 7 26. 10 şi 2, 8 şi 4. 27. *Indicaţie.* Dacă x este numărul mijlociu, atunci avem ecuaţia $x^2 - 12x = 0$. -2, -1, 0, 1, 2; 10, 11, 12, 13, 14. 28. *Indicaţie:* Notăm cu x şi $x+3$ numărul de zile de care ar avea nevoie fiecare din cei doi muncitori. Astfel, primul ar face zilnic $\frac{1}{x+3}$ din lucrare, celălalt $\frac{1}{x}$, iar împreună $\frac{1}{2}$. Se obţine astfel ecuaţia: $x^2 - x - 6 = 0$. 6 zile, 3 zile. 29. *Indicaţie:* Numărul zilelor de lucru ale primului şi celui de-al doilea muncitor fiind respectiv x şi $x+3$, se obţine ecuaţia: $\frac{180(x+2)}{x} =$

$= \frac{216(x+4)}{x+3}$. 6 zile, 30 de lei pe zi ; 9 zile, 24 de lei pe zi. **30.** 4 km, 3 km **31.** 8 şi 2. **32.** *Indicaţie :* Una dintre catete x este rădăcină a ecuaţiei $x^2 - 14x + 48 = 0$. Ambele rădăcini convin, dînd însă o singură soluţie a problemei, 6 m, 8 m şi 10 m. **33.** *Indicaţie :* Fie x jumătatea uneia din diagonale ; jumătatea celeilalte diagonale este $17 - x$. Se obţine ecuaţia $x^2 - 17x + 60 = 0$. 24 m şi 10 m. **34.** *Indicaţie :* Se notează cu x numărul laturilor poligonului. Din fiecare vîrf se pot duce $x - 3$ diagonale. În total vom avea $\frac{x(x-3)}{2}$ diagonale. Avem astfel ecuaţia $\frac{x(x-3)}{2} = 8x$, care dă pe $x = 19$. 19 laturi. **35.** 80 km/h, 70 km/h.

Capitolul IX

Introducere în geometria plană

1. *a)* da, *b)* da ; *c)* nu. **2.** *a)* 3 ; *b)* 6 ; *c)* 10, 190, $\frac{n(n-1)}{2}$. **3.** *Indicaţie :* Avem $OM = \frac{OB + OC}{2}$, $ON = \frac{OA + OC}{2}$, $OP = \frac{OA + OB}{2}$. Se adună relaţiile şi se obţine egalitatea cerută. **5.** 14 m. **6.** 9 m, 10 m. **7.** *a)* 7 cm; *b)* 1 cm. **8.** 13 cm. **9.** 19 cm. **10.** 3,5 cm. **11.** Unitatea de lungime pentru construcţia grafică este centimetrul. **12.** 2,5 cm. **14.** 30 cm. **15.** 5,5 cm. **16.** Segmentele au mărimea $a = 4{,}25$ cm, $b = 2{,}75$ cm. **17.** Se împarte segmentul de dreaptă AB în cinci părţi egale. **18.** 0,6 cm. **19.** $\frac{AB}{AC} = \frac{1}{m-1} = \frac{1}{4}$. **21.** 8,1 cm. **22.** Se împarte segmentul de dreaptă AB în cinci părţi egale. Numărătorii arată la cîte diviziuni se află punctele M şi N. **23.** 96 cm. **25.** Se va duce coarda perpendiculară în M pe raza care trece prin acel punct. **26.** 104 mm.

Unghiuri

8. *a)* 170° ; *b)* 280°. **9.** *a)* nu, micșorat $\widehat{A}$ cu 2' ; *b)* da ; *c)* nu, mărit $\widehat{A}$ cu 32'13''. **10.** 255° **11.** 84° **12.** *a)* 31°40'10'' ; *b)* 47°25'' ; *c)* 45° ; *d)* 63°18' ; *e)* 48°49'10'' ; *f)* 50°32' ; *g)* 26°46'32'' , *h)* 41°4'27'' ; *i)* 27°14' ; *j)* 32°5'20'' **13.** *a)* 39°23'33'' ; *b)* 49'28'53'' ; *c)* 12°37'56'' ; *d)* 82°16'29'' ; *e)* 23°5'37'' ; *f)* 196°3'10'' **14.** *a)* 72°18', 17°42' ; *b)* 180°52'14'' ; 61°37'46'' ; *c)* 92°15'25'', 16°48'29'' **15.** 116°11'. **16.** 53° **17.** 55°45', 24°52'45'' ; 50°59'43''. **18.** 122° **19.** *a)* da ; *b)* nu ; *c)* da ; *d)* nu ; *e)* da ; *f)* nu ; *g)* da ; *h)* da ; **20.** *a)* 59°44'43'' , *b)* 31°52'47'' ; *c)* 155°59'45''. **21.** *a)* da ; *b)* da ; *c)* nu ; *d)* nu ; *e)* da , *f)* nu ; *g)* da ; *h)* nu . **22.** *a)* 48°24'21'' 138°24'21'' ; *b)* 27°12'9'', 117°12'9''. **23.** *a)* $\frac{\widehat{A_1}+\widehat{A_2}}{2}$; *b)* $\widehat{A_2}+\frac{\widehat{A_1}+\widehat{A_3}}{2}$; *c)* $\frac{\widehat{A_2}+\widehat{A_3}}{2}$ **24.** Se ține seama de proprietatea unghiurilor opuse la vîrf. **25.** 67°30'. Să se observe că triunghiul BAB_1 este isoscel. **26.** *Indicație:* Semidreptele OB, OC sînt în interiorul unghiului xOy. Se obține egalitatea $2\widehat{xOB}+2\widehat{BOC}+2\widehat{COY}=2\widehat{xOy}=180°$. **27.** *Indicație* : Se exprimă $\widehat{COA}+\widehat{COB}$ și $\widehat{COA}-\widehat{COB}$ ca dublul unghiului $\widehat{DOC}$. Cînd semidreapta OC este exterioară avem : $\widehat{COA}+\widehat{COB}=2\widehat{COB}+2\widehat{BOD}=2\widehat{DOC}$ și cînd semidreapta OC este interioară avem $\widehat{COA}-\widehat{COB}=\widehat{AOD}+\widehat{DOC}-(\widehat{DOB}-\widehat{COD})=2\widehat{COD}$, deoarece $\widehat{AOD}=\widehat{DOB}=\frac{1}{2}\widehat{AOB}$, **28.** *Indicație* : Fie $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$ unghiurile adiacente. Avem $\sphericalangle\ \alpha=\frac{1}{2}(\widehat{AOB}+\widehat{BOC})$ cînd $\widehat{\alpha}=90°$, suma unghiurilor fiind 180°. **29.** Se ține seama de

unghiurile formate de bisectoare: 30. $\hat{a}-\hat{b}=90°$; împărțind egalitatea cu 2, obținem $\frac{\hat{a}}{2}-\frac{\hat{b}}{2}=45°$. 31. 60°, 20°, 90°, 180°. 32. 38°, 52°. Se scade diferența din 90° și rezultatul obținut se împarte la 2, aflîndu-se astfel unul din unghiuri. 33. 50°, 40°. Se va ține seamă că unghiul drept se compune din 9 părți egale. 34. 117°, 63°. Se scade $\frac{3}{5}$ dr. din 180° și rezultatul obținut se împarte la 2, aflîndu-se astfel unul din unghiuri.

Capitolul XI

Triunghiuri

12. Se construiește un segment BC egal cu 4 cm. În punctul B se duce o semidreaptă Bx, care face cu segmentul BC un unghi de 60°. Din A_1 mijlocul segmentului BC ca centru și cu o deschizătură de compas de 3 cm se descrie un arc de cerc care taie semidreapta Bx în punctul A. Se unește A cu C. Triunghiul ABC este cel cerut; 13. Se construiește un segment BC de 5 cm și o semidreaptă Cx, care face cu BC un unghi de 54°. Se construiește bisectoarea unghiului C, pe care se măsoară segmentul $CC_1=4$ cm. Se unește B cu C_1 pînă taie pe Ox în A. Triunghiul ABC este cel căutat. 14. Se duce o dreaptă și într-un punct A_1 al ei se construiește o perpendiculară pe ea. Pe această perpendiculară se măsoară segmentul $A_1A=4{,}5$ cm. Din punctul A de o parte și de alta a segmentului AA_1 se duc semidreptele Ax și Ay, care fac cu AA_1 unghiuri de 20°. Semidreptele Ax și Ay taie dreapta dată în B și C. Obținem astfel triunghiul ABC căutat. 15. Se construiește triunghiul AB_1B cu laturile $AB=4$ cm, $AB_1=3$ cm și $BB_1=5$ cm. Se prelungește AB_1 dincolo de B_1 cu $B_1C=3$ cm, și se unește B cu C pentru a avea triunghiul cerut.

22. Se duce o perpendiculară pe cateta cunoscută, care este egală cu suma ipotenuzei și celeilalte catete, apoi pe mijlocul ipotenuzei triunghiului dreptunghic astfel format se duce o perpendiculară. Se duce în sens invers o perpendiculară egală cu diferența cerută și pe mijlocul ipotenuzei triunghiului dreptunghic astfel format se duce perpendiculara. 23. Se duce DE egală cu perimetrul triunghiului și în extremitățile lui DE se construiesc unghiurile D și E, egale cu jumătate din unghiurile B și C. Se duc apoi perpendicularele GC și FB pe mijloacele laturilor AD și AE, care intersectîndu-se cu DE dau vîrfurile B și C ale triunghiului ABC cerut. 30. Se va ține seama că: $AB=AC$ prin ipoteză, $BM=CN$ prin construcție, iar unghiul ABM este egal cu unghiul ACN, fiecare avînd 90° din construcție. Triunghiurile BCC' și CBB' sînt egale. 39. Se consideră triunghiurile ADB și ADC. 40. Laturile AC și $A'B$ se taie în I. Avem: $AB<AI+IB$, $AC<A'I+IC$, de unde rezultă $AB+A'C<AI+IC+A'I+IB$ sau $AB+A'C<AC+A'B$. 41. Triunghiul ABD avînd unghiul A obtuz, rezultă $CE>CA$ sau $CE>CD+DA$. Prin adunare avem: $BD+CE>BE+EA+CD+DA$. Însă din triunghiul DAE avem $EA+DA>DE$. Rezultă în cele din urmă $BD+CE>BE+CD+DE$. 42. Prelungim AD cu segmentul $DE'=DE$. În triunghiul ECE' avem: $EE'<EC+CE'$, $2DE<2EC$, adică $DE<CE$. Însă $DE=AE$ și rezultă imediat $AE<CE$. 43. Pe perpendiculara din B, care-i una din localități pe direcția cursului, luăm punctul C astfel ca BC să fie egală cu distanța celor două țărmuri. Unim C cu A și perpendiculara pe mijlocul lui AC întîlnește țărmul în M, perpendiculara MN este direcția podului. Avem deci $AM=MC=BN$. 46. *Indicație.* Se duce paralela PE la latura AC și formează triunghiul isoscel BPE. Se duce și înălțimea BH la AC, care întîlnește în F pe PE. Se observă segmentele egale și avem imediat $PM+PN=BH$. Această sumă este constantă, fiind egală cu înălțimea BH. 47. Se observă că D este piciorul bisectoarei unghiului C. 49. Se observă că triunghiurile BDF și DCE sînt isoscele. 50. Dreapta OB'' taie pe AB în D, iar triunghiul ODC este echilateral.

Drepte paralele

11. *Indicație:* Se formează triunghiuri dreptunghice egale. **12.** *Indicație:* Unghiurile ABP și P sînt egale cu unghiurile A_1, A_2 formate de bisectoarea interioară AD. **17.** 112°, **34.** 34°, 34°. **18.** *a)* 46°56′; *b)* 43°23′46″; *c)* 105°43′22″. **19.** *a)* 47°44′36″, *b)* 36°59′35″. **20.** 1) 16°; 2) 51°. Unghiul cerut este egal cu diferența dintre unghiurile formate de înălțime cu latura AC și unghiul format de bisectoare cu latura AC; 2) Unghiul cerut este egal cu diferența dintre unghiul făcut de înălțime cu latura AC și unghiul făcut de bisectoare cu aceeași latură. Aceasta, datorită faptului că unghiul C este obtuz și înălțimea cade pe prelungirea laturii BC. **21.** *a)* 117°; *b)* nu; *c)* 117°. Se calculează în fiecare caz unghiul BIC după formula de la problema numărul 1 rezolvată a capitolului. **22.** *a)* 30°; *b)* 22°30′. Unghiul obtuz al triunghiului CDA este suplementul unghiului de 60°, respectiv de 45°. Se va ține seama că se formează triunghiuri isoscele. **23.** 1 dr$+\frac{\hat{A}}{2}, \frac{\hat{B}}{2}, \frac{\hat{C}}{2}$. **24.** *Indicație:* Se ține seama că triunghiul ACC' este isoscel, se observă unghiul ABC' exterior triunghiului dreptunghic ADB și egalitatea unghiurilor C', C cu $\widehat{BAD}$. **25.** *a)* 72°; *b)* 36°. **26.** 55°, 125°, 125°. **27.** 31°, 59°. Se aplică teorema unghiului exterior unui triunghi. Apoi, al doilea unghi se află scăzînd din 90° primul unghi. **28.** a) 360°, b) 540°; c) 1 440°; d) 3 240°. Se aplică formula sumei unghiurilor unui poligon convex regulat: $S=(n-2)2$ dr.

Patrulatere

12. Patrulaterul $MNDB$ este paralelogram deoarece are laturile două cîte două paralele. 25. *Indicație:* Se construiește triunghiul format de latura a cu jumătățile diagonalelor. 26. *Indicație:* Se construiește prima dată un triunghi dreptunghic cu o catetă de 2,5 cm și înălțimea coborîtă pe ipotenuză de 1,1 cm. 28. *Indicație:* Se construiește prima dată triunghiul cu laturile de 1,5 cm ; 2,5 cm ; 1,8 cm. 31. *Indicație:* Se construiește triunghiul format din cele două diagonale și suma bazelor ca a treia latură. 34. 22°30′, 112°30′, 45°. Se formează triunghiul isoscel BAE în care unghiul BAE este de 45° și unghiul BEC exterior triunghiului BAE este egal cu 112°30′. 35. 135°, 22°30′, 22°30′. Se formează triunghiul isoscel BCE în care unghiul BCE este egal cu 135°. 42. 10cm. 44. 32 m. 45. *Indicație:* Forța de 500 kg este diagonala unui romb care are laturile pe direcțiile părților de cablu. Rezultat aproximativ 1 600 kg. 47. 325 mm se calculează A_4B_4, care este linie mijlocie în trapezul $ABCD$, apoi linia mijlocie din fiecare trapez, care se formează în continuare.

Cercul

6. 4 cm. 14. Centrul cercului va fi la intersecția bisectoarei unghiului xOy cu o paralelă dusă la una din laturile unghiului la distanța de 5 cm de latură. 15. 20 cm. 16. *a*) secante ; *b*) tangente exterioare. *c*) tan-

gente interioare; *d)* exterioare; *e)* tangente interioare. **17.** *a)* secante; *b)* tangente interioare; *c)* exterioare; *d)* tangente exterioare; *e)* interioare. **19.** 1 cm. Diametrul cercului este egal cu diferența razelor celor două cercuri. **20.** 1 cm. **21.** 20 cm și 12 cm. **22.** Se construiește un cerc cu raza de 2,5 cm. Se duc raza OA și tangenta AT în O. Se construiesc unghiurile la centru $AOB=120°$ și $BOC=90°$. Se duc apoi tangentele la cerc în punctele B și C. **24.** Pe un segment BC egal cu 6 cm ca diametru se construiește un semicerc. Se ridică în centrul O o perpendiculară pe diametrul lui și se ia pe ea segmentul OD egal cu 2,5 cm. Prin D se duce o paralelă la diametrul BC. Această paralelă taie semicercul în punctele M și N. Triunghiul dreptunghic căutat este MBC sau NBC. **25.** 70° 130°, 80°, 35°, 65°. **26.** 45°, 135°, 45°, 135°. Diametrul AB împarte paralelogramul AT_1BT_2 în două triunghiuri dreptunghice isoscele. **27.** Se duce în A tangenta comună, care taie pe BC în D și se consideră triunghiurile soscele ABD și ADC. **28.** MO este bisectoarea unghiului AMB. **30.** Se exprimă segmentele cerute ca diferențe egale. **31.** Se va ține seama de proprietatea diametrului perpendicular pe o coardă. **32.** 90°. **33.** 45°. **34.** 36°15′, 18°10′, 25°20′, 152°47′30″, 158°15′, 27°12′30″, 140°7′30″, 18°7′30″, 9°5′. **35.** Se duce din O paralela comună la MP și NQ. **37.** *b)* Se construiește triunghiul ABO, în care se cunoaște unghiul B și două laturi AD și AC. **38.** 38°, 155°. **40.** 48°30′. **41.** *a)* 60°, 90°, 120°, 90°; *b)* $2R$: *c)* R Se observă că MN e latura triunghiului echilateral MPN.

Capitolul XV

Figuri asemenea

11. 10 cm. **13.** $13\frac{1}{3}$ cm. **14.** $MA=\frac{4}{3}$ cm, $MB=\frac{14}{3}$ cm.

15. $AM=\frac{1}{3}, MB=\frac{2}{3}$. Se ține seama că segmentul AB este un întreg

și că este egal cu suma segmentelor AM și MB. **16.** $\frac{AK}{AB}=\frac{m}{(m+n)^2}$, $\frac{KB}{AB}=\frac{n}{(m+n)^2}$.

18. $GH=7\frac{1}{2}$cm. **20.** 3 cm, 2,5 cm, 4,5 cm. Se formează șirul de rapoarte egale: $\frac{6}{a'}=\frac{5}{b'}=\frac{9}{c'}$, și se aplică proprietatea: suma numărătorilor pe suma numitorilor este un raport egal cu fiecare din rapoartele date. Rezolvarea grafică se face cu ajutorul dreptei ajutătoare AX, pe care se așază cap la cap mărimile segmentelor date. Extremitatea ultimului segment se unește cu extremitatea B a segmentului AB dat, iar din extremitățile segmentelor luate pe dreapta ajutătoare se duc paralele la dreapta formată. **21.** 14 cm **22.** 1 cm, 1,5 cm, 4,5 cm. **23.** Se aplică teorema lui Tales triunghiurilor ABD, și BCD obținînd proporțiile: $\frac{AN}{ND}=\frac{BM}{MD}$ și $\frac{CP}{PD}=\frac{BM}{MD}$, rezultînd că: $\frac{AN}{ND}=\frac{CP}{PD}$. NP este paralelă cu diagonala AC, pentru că numai în acest caz segmentele AN, ND, CP și PD determinate de NP pe laturile AD și DC ale paralelogramului $ABCD$ sînt proporționale. **24.** 72 mm,90mm. Se formează triunghiul MAB asemenea cu triunghiul MDC, din care rezultă: $\frac{AM}{MD}=\frac{AB}{DC}$. Latura MD se compune din segmentele AM și AD, adică $MD=AM+24$. Datorită acestui fapt proporția de mai sus devine: $\frac{AM}{AM+24}=\frac{36}{48}$, de unde rezultă $AM=72$ mm. Prin același procedeu se află și segmentul MB. **25.** Prin punctul I de intersecție al diagonalelor se duce paralela MN la bazele trapezului. Aplicînd teorema lui Tales în triunghiurile ABC și ABD, rezultă: $\frac{AM}{MB}=\frac{AI}{IC}$ și $\frac{AM}{MB}=\frac{DI}{IB}$. Apoi în triunghiul OBC format, AD fiind paralelă cu BC, rezultă imediat: $\frac{AO}{AB}=\frac{DO}{DC}$.

26. Se calculează segmentele $A'B$, BC', $A'A''$, $C'C''$, $A''A$, $C''C$, formate de dreptele $A'C'$ și $A''C''$ pe laturile AB și BC ale triunghiului ABC format. Cu ajutorul teoremei referitoare la dreptele paralele care determină pe două secante segmente proporționale avem șirul de rapoarte

egale $\frac{A'B}{BC'} = \frac{A'A''}{C'C''} = \frac{A''A}{C''C}$. Dacă înlocuim, mărimile segmentelor calculate verifică șirul de rapoarte egale, fiecare dintre el fiind cu $\frac{3}{2}$, adică arată că $A'C'$, $A''C''$ și AC sînt paralele. 27. $B_1C_1=2{,}13$ cm, $C_1D_1=2{,}66$ cm. Se aplică teorema din problema precedentă. 28. Se aplică teorema din problemele 26, 27. Raportul $\frac{9}{18}$ reprezintă suma segmentelor de pe fiecare dreaptă. 29. 48,57 m. Se aplică teorema lui Tales. 30. 2,57 m. Se aplică teorema lui Tales. 31. Se aplică teorema fundamentală a asemănării în triunghiurile asemenea formate. 32. Dreptele paralele construite una este interioară și alta exterioară .33. $AE=2$ cm, $EC=6$ cm, $BF=2{,}5$ cm, $FC=7{,}5$ cm, $DE=2{,}5$ cm, $EF=4{,}5$ cm. 34. $\frac{1}{2}$, 37. da, $\frac{5}{3}$. 41. *a)* $c=8$, $b_1=35$; *b)* $c=20$, $c_1=12$. 42. 13,6 cm. 43. da. 44. da. 45. 1 m, 2 m, 2,5 m. 46. nu. 47. nu. 48. Sînt egale. 49. 30 cm, 24 cm, 18 cm, 36 cm. 50. 18 m, 9 m, 12 m, 36 m. 51. 8 dm, 12 dm, 16 dm, 20 dm. 52. 100 m, 40 m. 53. *Indicație:* Din triunghiurile ABC și ABD se va demonstra că: $\frac{BF}{BC} = \frac{BG}{BD}$. 54. *Indicație:* În triunghiul CEF, paralelele la laturile AB și AD ne dau: $\frac{a}{CF}=\frac{EA}{EF}$, $\frac{a}{EC}=\frac{AF}{EF}$ pe care, adunîndu-le, obținem relația cerută. 55. $\frac{EA}{EC}=\frac{1}{2}$, $\frac{OB}{OE}=3$. Se duce prin D paralelă la BE. 56. 7,5 cm. 57. 15 cm, 12 cm. 58. *Indicație:* Patrulaterul este un romb. Se va stabili raportul în care bisectoarea împarte latura opusă și de aici raportul în care sînt împărțite laturile AB și BC. R.$\approx$2,14 m.

Relații metrice

9. *a)* 37 cm ; *b)* 65 cm ; *c)* 97 cm. **10.** *a)* 161 ; *b)* 260 ; *c)* 24. **11.**

	a	b	c	a_c	b_c	h
a_1	15	20	25	9	16	12
a_2	24	7	25	$23\frac{1}{25}$	$1\frac{24}{25}$	$6\frac{18}{25}$
a_3	4	5	$\sqrt{41}$	$\frac{16}{41}\sqrt{41}$	$\frac{25}{41}\sqrt{41}$	$\frac{20}{41}\sqrt{41}$
a_4	100	75	125	80	45	60
a_5	156	65	169	144	25	60
a_6	600	175	625	576	49	168
a_7	6	8	10	3,6	6,4	4,8
a_8	24	7	25	23,04	1,96	6,72
a_9	21	20	29	$15\frac{6}{29}$	$13\frac{23}{29}$	$14\frac{14}{29}$
a_{10}	$\sqrt{3}$	$\sqrt{6}$	3	1	2	$\sqrt{2}$
a_{11}	$2\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{3}$	$4\frac{1}{6}$	$1\frac{1}{2}$	$2\frac{2}{3}$	2
a_{12}	$2\sqrt{10}$	$6\sqrt{10}$	20	2	18	6
a_{13}	136	255	289	64	225	120
a_{14}	40	9	41	$39\frac{1}{41}$	$1\frac{40}{41}$	$8\frac{32}{41}$

12. 4,6 cm. **13.** 20 cm. **14.** 9 cm, 12 cm. **15.** 20 cm. **16.** Se exprimă pătratul fiecărei catete și se face raportul lor. **17.** $a\sqrt{2}$. **18.** $\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}$. **19.** 5 m. **20.** 24 cm. **21.** 36 cm, 54 cm. **22.** 39 dm. **23.** 21 cm. **24.** 77 cm. **25.** 50 cm,

72 cm. 26. *Indicație:* Se aplică teorema catetei și avem: $\frac{AC^2}{BC^2}=\frac{BC\cdot z}{BC(z+2)}=$ $=\frac{4}{9}$. 5,2 m. 27. 18 cm; 98 cm; 28. 40 cm. 29. Tangenta exterioară este egală cu 48 cm, tangenta interioară este egală cu 30 cm. 30. 13,44 dm. 31. *a)* 6 cm; *b)* 12 cm; *c)* 1 m. 32. 10,24 cm. Triunghiul dreptunghic este isoscel și, aplicînd teorema lui Pitagora, ipotenuza este egală aproximativ cu 4,2 cm. 33. 64 m. Din triunghiul ABD se calculează BD, iar din triunghiul ADC se află AC. Cunoscînd pe AB și BD, se află ipotenuza BE a triunghiului ABE și rezultă CE. Se calculează AF și se află perimetrul. 34. $BD=\sqrt{2\,083}$ m, $DF=\sqrt{1\,141}$ m. Triunghiurile dreptunghice formate, fiind asemenea din șirul de rapoarte egale $\frac{AC}{39}=\frac{CE}{30}=\frac{EG}{21}=\frac{120}{90}$, exprimă proporționalitatea laturilor, din care se află AC, CE și EG. Folosind teorema lui Pitagora, se calculează BC, DE și apoi BD și DF. 35. 30,95 m. Din triunghiul dreptunghic ABD se determină imediat segmentul BO, apoi segmentul OD de pe diagonala BD și înălțimea AO. 36. 6,4 m. 37. 10,6 cm, 30,6 cm; 38. 26,36 m.

Capitolul XVII

Funcțiile trigonometrice ale unui unghi ascuțit

6. $\sin x=0{,}8$, $\cos x=0{,}6$, $\operatorname{tg} x=1{,}3$, $\operatorname{ctg} x=0{,}7$. În triunghiul dreptunghic format din înălțime, jumătatea bazei și una din laturile egale ca ipotenuză, la unghiul x se aplică definițiile funcțiilor trigonometrice ca rapoarte. 7. $\sin B=0{,}790$, $\cos B=0{,}610$, $\operatorname{tg} B=1{,}291$. $\operatorname{ctg} B=0{,}774$, $\sin C=0{,}610$, $\cos C=0{,}790$, $\operatorname{tg} C=0{,}774$, $\operatorname{ctg} C=1{,}291$. 8. În triunghiul dreptunghic, notînd ipotenuza și catetele cu a, b, c, avem: $\sin B=\frac{b}{a}$,

cos $B=\frac{c}{a}$. Înlocuind aceste rapoarte în egalitate și efectuînd calculele, rezultă : $\frac{b^2}{a^2}=\frac{a^2-c^2}{a^2}$, însă potrivit teoremei lui Pitagora $a^2-c^2=b^2$, conduce la verificarea egalității. 9. tg B=ctg C=1, pentru că unghiul B este egal cu unghiul C și este egal cu 45°. Înlocuind valorile lor în egalitate, o verifică. 10. Folosim aceeași notație pentru laturile triunghiului dreptunghic ca și în problemele precedente. 11. Înlocuind funcțiile trigonometrice sinus și cosinus definite ca rapoarte, obținem pe rînd : a) $\frac{b^2}{a^2}+\frac{c^2}{a^2}=1$ și b) $\frac{c^2}{a^2}+\frac{b^2}{a^2}=1$. Se ține seamă că : $b^2+c^2=a^2$. 12. Da, nu pentru că sinus și cosinus care sînt cel mult egale cu 1. 13. Da, pentru că sînt valori subunitare și verifică relația $\sin^2x+\cos^2x=1$. 14. a) $a+c$; b) a^2+b^2, c) $(a+b)^2$. 15. a) $\frac{\sqrt{3}}{2}(a^2-b^2)$; b) $2+4\sqrt{2}$; c) 10. 16. Se înlocuiesc valorile funcțiilor trigonometrice cerute. 17. Pentru $x=30°$, ctg $60°=\frac{1}{\sqrt{3}}$; pentru $x=90°$ ctg $90°=0$. 21. cos $(90°-\alpha)=\frac{2}{5}$. 22. *a)* 78° ; *b)* 53°55′ ; *c)* 45°25′ ; *d)* 8°14′24″ 23. 0,71024. 24. 0,98770, 0,63875. 25. 0,57842, 3,13659. 26. 0,57842, 1,88060. 27. 36°52′12″ ; 51°41′3″. 34°18′56″. 28. 0,189. 29. *Indicație:* Se aplică teorema lui Pitagora și avem : $b^2=a^2-c^2$. Se formează sistemul din suma și diferența lui a și c și se află : $a=165{,}86$ m ; $c=108{,}34$ m; $\widehat{B}=49°13'$. 30. 400,18 m. 31. 46,195 cm, 19,134 cm. 32. 947 m.

Capitolul XVIII

Poligoane regulate

6. $40\sqrt{2}$. 8. $8\sqrt{3}$ m, 4 m, 12 m. 9. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ m ; 10. 45 mm. 11. 4,275 cm. 12. *Indicație :* Se duc doi diametri perpendiculari, MN, AP, apoi OD perpendicular pe NP și BDC paralel cu MN. Triunghiul ABC este echi-

lateral, căci BC trece prin mijlocul lui OP. 13. 1,7 cm. 14. Baza fiind perpendiculară pe coardă, împarte coarda și arcul subîntins în două părți egale. Se va arăta astfel că arcul subîntins este 120°, deci coarda este latura triunghiului echilateral înscris. 15. Cu ajutorul formulelor se arată imediat. 16. $2m\sqrt{3}$. 17. $r=\sqrt{R^2-\frac{a^2}{4}}$ 18. $a=2\sqrt{R^2-r^2}$. 19. $\frac{a_3}{b_3}=\frac{1}{2}$, $\frac{a_6}{b_6}=0{,}866$. Se notează laturile poligoanelor cu a_3, b_3, a_6. b_6, 20. $\frac{b\sqrt{3}}{3}$; $\frac{b\sqrt{6}}{3}$. 21. 4,9 dm ; 22. 0,3 R. 23. 0,82 a. 24. 31,83 m. 25. 8,46 cm, 6,92 cm. Se află razele, egalînd mărimea coardei comune cu formula fiecărei laturi. Vom avea deci : $R\sqrt{3}=12$, $r\sqrt{2}=12$. 26. 3 cm. 27. 4 m. 28. $\frac{20\pi}{9}$ m. 29. $\frac{48}{\pi}$ m. 30. Se exprimă latura pătratului în funcție de rază. Astfel, perimetrul este egal cu $4R\sqrt{2}$ și, exprimînd raportul cerut, rezultă $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$. 31. 1 m. 0,72 m; 32. 1) 62,8 m ; 2) 94,2 m ; 3) 220 cm². 33. 16 cm, 4 cm, 0,76 dm. 34. 1) $\frac{\pi R}{4}$; 2) $\frac{49\pi R}{360}$; 3) $\frac{419\pi R}{14\,400}$. 35. 133°20′. Din lungimea cercului se află mărimea razei, care înlocuită în formula lungimii arcului de cerc ne dă unghiul la centru. 36. 21°. Se procedează ca și în problema precedentă. 37. 4 dm. 38. 15,07 cm, 28,26 cm. 39. 10,20 m. 40. 3,98 m. Lungimea unei spițe este egală cu raza cercului. Ea se află împărțind lungimea cercului la 2π. 41. $\approx$ 415 bare. 42. Se calculează lungimea arcului de 15° cu raza de 6 cm și se obține rezultatul, care este egal cu 1,57 m.

Capitolul XIX

Arii

9. 7,5 dm. Se exprimă lățimea din aria dreptunghiului. 10. 18 000 de bucăți. 11. 240 de bucăți. Se procedează ca la problema precedentă. 12. 1,125 m². Perimetrul dreptunghiului ținînd seamă de relațiile pro-

blemei este egal cu $6x$. **14.** 8 m, 18 m. Se notează lungimea cu x și lățimea cu y. **15.** 12 dm, 25 dm, 300 dm². **16.** 24 m. **17.** 34 cm, 60 cm². **18.** 760 m. **19.** $\frac{1}{2}$ dm. Se aplică teorema lui Pitagora. **20.** $2R^2$. Se aplică teorema lui Pitagora. **21.** De două ori. Se exprimă fiecare arie și se face raportul lor. **22.** Latura se dublează. **23.** Se mărește de 9 ori, se micșorează de 2,25 ori. **24.** S-o mărim de două ori, s-o micșorăm latura de cinci ori. **25.** 552,25 ha. **26.** a) $\frac{ab}{2}$; b) $\frac{ab\sqrt{2}}{2}$; c) $\frac{ab\sqrt{3}}{2}$. **27.** 30°. **28.** 6 cm, $5\frac{1}{3}$ cm. **29.** 288 cm², 1 m². **30.** 1) $\frac{ab}{4}$; 2) $\frac{ab\sqrt{2}}{4}$; 3) $\frac{ab\sqrt{3}}{4}$. Se exprimă trigonometric înălțimea, considerînd ca bază latura a. **31.** 1) da; 2) nu; 3) da. **32.** 39 dm². **33.** 82 cm. Notăm catetele cu x și y și avem relațiile: $\frac{x}{y} = \frac{1}{40}$ și $xy=720$. Se exprimă x din proporție și se înlocuiește în suprafață. **34.** $\frac{c^2}{4}$. Se aplică teorema lui Pitagora. **35.** 1) 2 688 cm²; 2) $\frac{b}{4}\sqrt{4c^2-b^2}$; 3) $10\sqrt{21}$, 46 cm². Se calculează înălțimea cu teorema lui Pitagora din triunghiul dreptunghic format dintr-o latură egală și din jumătatea bazei. **36.** 6 dm². Se află ipotenuza, adunînd segmentele și înălțimea cu relațiile metrice în triunghiul dreptunghic. **37.** 2 250 cm² sau 522 cm². Cu teorema lui Pitagora din triunghiurile dreptunghice formate de înălțime și de cîte o latură care pleacă din același vîrf se calculează segmentele bazei determinate de înălțime. **38.** 4 152 mm². **39.** 1 440 cm². **40.** 96 cm². Cu teorema lui Pitagora se află jumătatea diagonalei mari și apoi aria rombului. **41.** 180 cm. **42.** 240 mm², 84 mm. **43.** 8 cm. Cu ajutorul formulei ariei trapezului avem $l=\frac{2A}{B+b}$. **44.** 25 cm. Aria trapezului este egală cu produsul dintre linia mijlocie și înălțime. **45.** 8 cm, 10 cm. Datele problemei conduc la relațiile $\frac{b}{B}=\frac{4}{5}$ și $144=\frac{(B+b)\,16}{2}$. Exprimînd pe b din proporție și înlocuindu-l în arie, avem ecuația de gradul I în B: $144=8\left(B+\frac{4B}{5}\right)$. **46.** 40 m. **47.** 450 cm, 150 cm. **48.** 24 dm². Se calculează

înălțimea cu teorema lui Pitagora din triunghiul dreptunghic format din tr-o latură egală ca ipotenuză și semidiferența bazelor ca o catetă. **49.** 288 cm². Se calculează înălțimea din triunghiul dreptunghic isoscel format cu latura egală și semidiferența bazelor. **50.** 256 cm². Se formează două triunghiuri dreptunghice isoscele, din care pătratul fiecărei catete ajută la calcularea pătratului laturii egale. Apoi din triunghiul dreptunghic format cu latura egală și cu semidiferența bazelor se află înălțimea de 16 cm. **51.** 1 264 m². Planul clădirii se împarte în figuri cunoscute, ca : triunghiuri, dreptunghiuri, trapeze dreptunghice egale și trapeze isoscele. **52.** 38,175 ari, 10 ari. Se împarte figura în trei trapeze isoscele. **53.** 534,50 m². **54.** 1) 314 m²; 2) 50,2 dm²; 3) 21,2 cm². **55.** 78,5 cm². **56.** 1) $\frac{3}{16}\pi r^2$; 2) $\frac{7}{160}\pi r^2$.

57. 54 cm, 45 cm. Pentru aflarea înălțimii se aplică repetat teoremele referitoare la cele două laturi. **58.** 186,3225 m². Bazele trapezului sînt latura hexagonului și latura triunghiului echilateral înscrise în cercuri cu raza de 10 m, iar înălțimea este egală cu suma apotemelor acelorași poligoane. **59.** 58,0586 cm². Se află aria cercului cu raza de 4,30 cm. **60.** 211,2418 dm². **61.** 8,56 m. **62.** 12 dm. Din formula ariei sectorului circular avem $R^2=\frac{A\cdot 360}{\pi n^\circ}$. **63.** 0,64 cm². Aria cerută se află scăzînd din aria triunghiului echilateral $O_1O_2O_3$, format unind centrele celor trei cercuri, aria a trei sectoare circulare egale, corespunzător fiecare unui unghi la centru de 60°. **64.** 418,248 dm². Din aria cercului se scade aria sectorului din același cerc ce are arcul de 27°. **65.** 47,26 cm². Bazele trapezului sînt : $5\sqrt{3}$ și $5\sqrt{2}$, iar înălțimea este egală cu diferența apotemelor pătratului și triunghiul echilateral : **67—69.** Se exprimă aria pătratului hexagonului și triunghiului echilateral înscrise în cerc prin rază, fiind respectiv egale cu $2R^2\frac{3R^2\sqrt{3}}{2}$ și $\frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$.

Capitolul XX

Introducere în geometria în spațiu

8. Două plane concurente după dreapta paralelă cu dreapta dată, conținută în planul dat. 9. Sînt concurente după o dreaptă care este dreapta de intersecție a planelor formate. 11. Cele trei drepte trec prin punctul în care dreapta (D) înțeapă planul ABC.

Capitolul XXI

Poziții relative ale elementelor fundamentale

11. Din paralelipipedul format se observă că patrulaterele sînt paralelograme, iar paralelogramele $ABCD$ și $A_1B_1C_1D_1$ sînt paralele. 12. Prin dreapta d și prin punctul A se duce un plan P. În acest plan se duce o dreaptă d_1 paralelă cu dreapta d. 13. Printr-un punct din planul P se duc două drepte oarecare și se va ține seama de construcția unui plan paralel cu un plan dat printr-un punct exterior lui. 15. 82 cm. 16. $10\sqrt{2}$. 17. 35 cm. 18. $a\sqrt{2}$. 19. 8 cm. 20. 5 cm. 21. 109 cm. 22. $MB=54$ cm, $MC=60$ cm. Se aplică teorema lui Pitagora în triunghiurile dreptunghice formate de perpendiculara în punctul de intersecție al diagonalelor și oblica la vîrful respectiv al rombului. 23. $25\sqrt{2}$ cm. 24. 20 cm. 25. 4 cm. 26. 7,07 cm. 27. $5\sqrt{2}\approx 7{,}05$ cm. 28. $MA=4{,}6$, $MB=5{,}68$, $MC=8$. Se formează triunghiurile dreptunghice MOA, MOB, MOC, în care avem :

$MA=\frac{MO}{\cos 30^\circ}$, $MB=\frac{MO}{\cos 45^\circ}$ și $MC=\frac{MO}{\cos 60^\circ}$. 29. 9 cm. 30. 4 cm. În triunghiul dreptunghic format de oblică, perpendiculară și proiecția oblicei din plan se aplică teorema catetei. Avem astfel: $6^2=9x$ din care aflăm valoarea lui x. 31. 2,6 m. Din punctul B se duce paralela BE la CD și din triunghiul dreptunghic AEB cu teorema lui Pitagora se află AB. Se observă că $AE=AC-BD$. 32. 9 m. 33. 8 cm. 34. $2a$: A_1B_1 fiind proiecția segmentului AB paralel cu planul este egală cu a și BA_1 este ipotenuză în triunghiul dreptunghic BB_1A_1, în care $BA_1=\frac{a}{\cos 60^\circ}$. 35. 12 cm. Se formează triunghiul EBD. asemenea cu triunghiul EAC, la care scriem proporția $\frac{EB}{AB+EB}=\frac{DB}{AC}$. 36. 110°. 37. $2a$. Se observă că distanța la muchie este egală cu $\frac{a}{\cos 60^\circ}$. 38. 7 cm. În triunghiurile dreptunghice formate se aplică repetat teorema lui Pitagora.

Capitolul XXII

Proiecții

6. Rapoartele sînt egale deoarece punctele A, B, C, coliniare formează segmentele AB, BC în prelungire, avînd ca proiecții segmentele ab și bc din planul P pe aceeași dreaptă. Se aplică teorema șirului de drepte paralele. 7. Neegale. 8. $A'B'<AB$. 12. 1) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$; 2) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; 3) $\frac{a}{2}$. În triunghiurile dreptunghice formate, proiecția este egală pe rînd cu mărimea oblicei înmulțită cu cosinusul unghiurilor de 30°, 45°, 60°. 13. 1) 2 h; 2) $\frac{2h}{\sqrt{2}}$; 3) $\frac{2h}{\sqrt{3}}$. 14. 30°. Se exprimă sinusul unghiului făcut de segment cu planul; 15. 60°; 16. Egale. 17. a, $a\sqrt{3}$. 18. 115°.

Poliedre

11. $\approx$ 115,8 m². **12.** $3ah+2.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. **13.** 1 500 cm²; 2 019 cm². **14.** 3,7 dm. **15.** 1 300 cm². **16.** 2 400 dm²; 2 592 dm². **17.** 19 478,4 kg de mortar. **18.** 101,036 m³. **19.** 125,06 hl. Se ține seama de înălțimea pînă la care se ridică apa în bazin, fiind 1,30 m în cazul de față. **20.** 8 m, 2,75 m. Se ține seamă că 1 dm³=1 l. **21.** 1 912 bucăți. **22.** 1 066, 66 m². Se află volumul pămîntului împrăștiat și se împarte la grosimea stratului, adică la 15 cm. **23.** 121,5 vagoane. **24.** 640 cm³. Lungimea și lățimea se micșorează fiecare cu 10 cm, iar adîncimea cutiei este 5 cm. **25.** 327,60 kg. **26.** 3 persoane. **27.** 8 m², 0,48 m³. **28.** 628 m². 912 m³. Se află a doua latură a bazei cu teorema lui Pitagora și înălțimea egală cu $\frac{2}{3}$ din perimetrul bazei. **29.** nu. **30.** 60 dm²; 51,90 dm³. **31.** 4 860 ddal. **32.** 17,8 m. **33.** 43,056 kg. **34.** 10 120 de bucăți, 24%. **35.** 336 cm³. **36.** 2 112 cm²; 3 840 cm³. **37.** 100 dm², 150 dm². **38.** 4 056 cm²; 17 576 cm³. **39.** 5,190 m³; 4,152 t. **40.** Balanța se înclină de partea oțelului. **41.** 1 992,96 cm³. **42.** 8 m. **43.** 38,400 m³; 10 666 de plăci. **44.** 978 m² **45.** 85,92 m². **46.** $\approx$ 3 m. **47.** 2 771 cm²; $\approx$ 32,6 cm. **48.** 9 300 cm²; 78 000 cm³. **49.** 7 879,68 cm³. **50.** 127,488 cm³. **52.** $\frac{a^2}{8}(1+\sqrt{3+\sqrt{2}})$. **53.** 128 cm³. **54.** 10 cm. **55.** 4 cm. **56.** 1 280 cm³, 17 cm, 544 cm². **57.** 12 cm; 10,9 cm; 363,3 cm³. **58.** *Indicație:* Notăm cu x latura bazei mici și, aplicînd formula volumului trunchiului de piramidă, avem ecuația $x^2+5x-6=0$, a cărei rădăcină pozitivă este latura bazei mici. Aria = 1 dm². **59.** 17 280 cm². **60.** 2 000 de puieți. **61.** 235,2 kg. **62.** 3 120 m². **63.** 842,4 cm²; 1 230,4 cm²; 2 128 cm³. **64.** 63,3 t. **65.** 112 cm²; 7,10 cm; 2,84 cm; 2,6 cm; 135,2 cm³.

Corpuri rotunde

12. 376,8 cm^2; 452,16 cm^3. 13. 7 cm, 140 π cm^2. 14. 11 cm, 304 π cm^2. 15. 192 π cm^3, 128 π cm^2. 16. 54 π cm^2, 3 cm. 17. 350 π cm^3, 190 π cm^2. 18. 15 cm, 20 cm, 1 050 π cm^2. 19. 9 cm, $18\frac{7}{9}$ cm, 1 521 π cm^3. 20. 6,95 lei. 21. 5 cm, 18,84 cm. 22. 3 194,5 cm^2. 23. 5,225 m^2. 24. 22,507 dal. 25. 3,83 m. 26. 17,214 kg. Lungimea rectilinie a unui fir înmulţit cu 7 şi adunată cu 10% din lungimea totală reprezintă înălţimea cilindrului cu raza de 2 mm. 27. a) 179,79 m; b) 81 de stîlpi. 28. 7,9 m^3, 23,700 t. Se află raza din aria laterală şi apoi masa înmulţind volumul cu densitatea. 29. 1 146 kg mortar. 30. *Indicaţie*: Se află volumul şi se împarte la 3. $183\frac{1}{6}$ ore. 31. *Indicaţie*: Secţiunea axială este un dreptunghi. 628 cm^2, 785 cm^2. 32. 15,683 kg. 34. *Indicaţie*: Volumul rezervorului este egal cu diferenţa volumelor cilindrilor cu razele de 5 m şi 4,990 m $\approx$ 30 566 kg. 35. *Indicaţie*: Se află volumul cu dimensiunile interioare. 56,520 l. 36. 7 360 kg. Conducta are formă paralelipipedică, cu 9 orificii cilindrice. 37. 625 m. 38. 766 kg. 39. 49,6 kg. 40. 15 cm, 25 cm. 41. 675 π cm^2, 900 π cm^2. 42. 100 π cm^3, 65 π cm^2. 43. 24 cm. 44. 281,30 cm^2. 45. 116,078 cm^3. 46. 3 215,60 m^3. 47. 136 π cm^2, 320 π cm^3. 48. 2 048 π m^3, 480 π m^2. 49. 25,12 m^2, 35,9 m doc. 50. 1 004,80 cm^2; 1 808,64 cm^3. 51. 6,28 m^3. 52. 25,12 dm^2. 53. 0,58875 m^2. 54. *Indicaţie*: Se află volumul fiecărei părţi. 562,857 kg. 55. 126,60 cm^2. 56. 1 833,76 m^3. 57. 3,375 dm^3. În triunghiurile dreptunghice formate avem: $\frac{r}{R} = \frac{h}{H}$, de unde $r = \frac{R \cdot h}{H}$. 58. 1,12 m^2. Se află razele cercurilor de bază din lungimile cercurilor lor. 59. 42,905 l. Se exprimă volumul în decimetri cubi şi se ţine seamă că un decimetru cub este egal cu un litru. 60. 632 l. Se calculează înălţimea din triunghiul dreptunghic format de generatoare cu diferenţa bazelor, apoi se exprimă volumul în dm^3. 61. 36,8 l. Se află volumul egal cu 80% din volumul

căldării și acesta se exprimă în dm^3. 62. $\frac{32\pi}{3}$ cm^3. 63. $36\pi cm^2$. 64. 314 cm^2. 65. $171\pi cm^2$. 66. 5,19 cm. 67. 36,57 kg. Volumul ornamentului este egal cu suma dintre volumul cubului și sferei. 68. 314 dm^2; 523,75 dm^3. 69. 18,1 m^2 70. 314 dm^2; 523,75 dm^3. 71. 979,68 cm^2 de tablă. 72. *Indicație:* Se formează triunghiuri asemenea. 4 m, 3 m, 5 m. 73. *Indicație:* Se află înălțimea cu teorema lui Pitagora. 39,288 m^3. 74. 154,49 m^2. 75. *Indicație:* Se află înălțimea cu teorema lui Pitagora. 343,620 m^3. 76. *Indicație:* Se consideră cazurile cînd secțiunile se află de aceeași parte a centrului sferei și de o parte și cealaltă a centrului sferei. 0,60 dm; 8,6 dm. 77. *Indicație:* Se află raza sferei cu teorema lui Pitagora. 163,28 m^2. 78. 3,33 cm. Aria bazei prismei este egală cu volumul sferei împărțit la înălțime.

Capitolul XXV

Probleme de sinteză

1. 1) $E(a)=-\frac{18}{3-5a}$; 2) $a=25$ și $E(25)=\frac{9}{61}$. 2. 1) $E(x)=\frac{\frac{49}{25}x}{\frac{49}{25}x-4}$; 2) $x=-\frac{100}{49}$. 3. 1) $E(x)=\frac{x+1}{x-1}$; 2) $x=\frac{2}{9}$ și $E\left(\frac{2}{9}\right)=-1\frac{4}{7}$. 4. 1) $E(x)=\frac{x-1}{x+1}$; 2) $x=15$. 5. $x=-9\frac{1}{11}$. 9. $x=\frac{a+b}{a-b}$, $y=\frac{a-b}{a+b}$, $z=\frac{2ab}{a^2-b^2}$. 11. $\frac{x-y+1}{x+y-1}$. 12. 100 ha primul lot, 25 ha al doilea lot. 13. 288 t de grîu de pe primul lot, 455 t de grîu pe a doilea lot. 14. 500 ha prima, 380 ha a doua. 15. 1 575 de lei primul mecanic, 1 125 de lei al doilea mecanic, 900 de lei la al treilea mecanic. 16. 3 600 m norma pe lună la primul atelier, 4 400 m norma la al doilea atelier, 4 260 m realizat peste normă în 3 luni. 17. *Indicație*

Se notează cu x timpul socotit în ore în care primul muncitor a terminat lucrarea și cu $x+10$ pentru al doilea muncitor. Se obține ecuația de gradul II $x^2-14x-120=0$. $x=20$ ore, $x+10=30$ ore. 19. *Indicație*: Se va demonstra egalitatea triunghiurilor BMB' și CMC'. 20. *Indicație*: Triunghiul ABC este isoscel, în care $AB=BC=20$ cm. 22. *Indicație*: Se folosește proprietatea tangentelor duse dintr-un punct exterior la un cerc, care permite scrierea perimetrului ca $4(x+y)=34$. Se aplică teorema înălțimii și rezultă $xy=3{,}4^2$. Se formează ecuația de gradul II: $11z^2-8{,}5z+11{,}56=0$. Laturile trapezului sînt egale cu 13,6 cm; 3,4 cm și 8,5 cm. 23. *Indicație*: Se aplică teorema lui Tales triunghiului ABD și secantei EG, cît și triunghiului GFC tăiat de secanta AD. 24. *Indicație*: În triunghiul dreptunghic BQC avem $MQ^2=BM\cdot MC$. Se consideră și triunghiurile asemenea BMP și MNC, din care se arată relația cerută. 25. *Indicație*: Dreptele EH și FG, fiind paralele cu diagonala AC, determină perechile de triunghiuri asemenea: $\Delta ADC\sim\Delta EDH$ și $\Delta ABC\sim\Delta FBC$. 26. *Indicație*: Se aplică proprietatea șirului de rapoarte egale și se calculează imediat dimensiunile paralelipipedului, care sînt egale cu 4, 16, 32 m, volumul fiind egale cu 2 048 m^3. 27. *Indicație*: Se notează cu x, y, z dimensiunile paralelipipedului, iar $z=25$ cm. Din formulele ariei laterale și totale se află $x+y=13$ și $xy=36$, unde, substituind pe $y=13-x$ în produs, obținem o ecuație de gradul II. Dimensiunile paralelipipedului sînt $x=4$, $y=9$, $z=25$, iar $x^2+y^2+z^2=722$, care este aria totală a paralelipipedului. 28. *Indicație*: Se notează cu x, y, z dimensiunile paralelipipedului și se obține un sistem de 3 ecuații cu 3 necunoscute. În ecuația $(x+y)z+xy=44$ se înlocuiește suma $(x+y)$ și produsul xy exprimate prin z și se obține ecuația de gradul III: $z^3-13z^2+44z-32=0$, care are o rădăcină egală cu 1. Celelalte rădăcini se află împărțind polinomul de gradul III cu $(z-1)$. Dimensiunile paralelipipedului sînt $x=1$, $y=4$, $z=8$ și aria laterală egală cu 80 cm^2. 29. $x=4$, $M=45{,}5$ t de grîu. 30. $V=144$ dm^3. 31. *Indicație*: Din volum se află înălțimea egală cu 108 cm. Raza sferei și a cilindrului este apotema pătratului cu latura 7,2 cm. Masa barei este 33,54 kg. 32. *Indicație*: Se aplică de două ori teorema lui Pitagora și se află: $R=15$ cm, $r=8$ cm, iar $l=23$ cm. Se calculează cu ajutorul formulei volumul și avem: $V=9\,845{,}990$ cm^3. 33. 1) $A=9{,}94$ dm^2; 2) $V=58{,}56$ dm^3. 34. $V=384{,}65$ m^3. 35. *Indicație*: Se formează un triunghi echilateral. Înălțimea este egală cu 3 cm, iar lungimea cercului bazei este dublu înălțimii. Se calculează volumul egal cu $\frac{2l}{\pi}$ cm^3. 36. $A_l\approx 159{,}48$ cm^2; $A_b\approx$

$\approx 273{,}6$ cm^2; $V \approx 226{,}08$ cm^3. **37.** $V \approx 697{,}08$ cm^3. **38.** $B = 14$ m, $b = 8$ cm. **39.** *Indicație*: Se află aria rombului și diagonala mare, iar dintr-un triunghi dreptunghic ale cărui catete sînt egale cu 12 m și 9 m se află cu teorema lui Pitagora latura rombului egală cu 15 m. **40.** *Indicație*: Se află $R = G$, iar $R = \sqrt[3]{1\,000}$, adică $R = G = 10$ m. **41.** *Indicație* Se aplică teorema lui Pitagora și din $R + G = 25$ se înlocuiește $G = 25 - R$ și se află $R = 8$ m, iar $G = 17$ m. Se calculează aria laterală egală cu 427,04 m^2 și volumul cu 1 004,80 m^3. **42.** *Indicație*: Se pune problema în ecuație și după efectuarea calculelor avem sistemul $\begin{cases} 2G - 3R = 6 \\ G + R = 5 \end{cases}$ pe care, rezolvîndu-l, aflăm $R = \frac{4}{5}$ și $G = \frac{21}{6}$. Se calculează înălțimea cu teorema lui Pitagora și volumul este egal cu 2,7 m^3. **43.** 278 078,4 kg este masa coșului de fabrică. **44.** $\frac{ab}{(a+b)^2}$. **45.** $Vol = 1\,230{,}88$ dm^3, $A_l = 549{,}50$ dm^2. **46.** *Indicație*: Se află cateta CA cu teorema lui Pitagora, se formează triunghiurile CPN și CAB asemenea; 44 030 l capacitatea bazinului. **47.** a) $\frac{4xy^2}{x+3y}$, $\frac{64}{265}$. **48.** *Indicație*: Din condiția dată în problemă avem: $AD + DE + AE = DE + EC + BC + DB$ sau $AD + AE = (5 - AD) + (7 - AE) + 6$ sau $AD + AE = 9$. Triunghiurile ADE și ABC sînt asemenea, în care avem: $\frac{AD}{5} = \frac{AE}{7}$. **49.** *Indicație*: În triunghiurile asemenea PEC, MAC avem $\frac{PE}{MA} = \frac{PC}{MC}$, însă $BM = MC = \frac{1}{2}BC$ și $BP + PC = BC$. Se adună relațiile scrise și avem $PD + PE = 2MA$. **50.** 314, 4375 cm^2; 303,75 cm^3. **51.** a) $x = 15$, $y = 12$, $z = 16$, $u = 14$; b) $(a, b, c \neq 0)$, $x = \frac{a(b+c)}{2}$, $y = \frac{b(c+a)}{2}$, $z = \frac{c(a+b)}{2}$. **52.** 6 zile prima brigadă, 12 zile a doua brigadă. **53.** 80 ha. **54.** $128\sqrt{3}$ cm^3. **55.** *Indicație*: Se obține un trunchi de con. $Vol \approx 119\,031$ dm^3, $At \approx 20\,350$ dm^2. **56.** a) $x = 6$; b) $V = 904$ dm^3, $A \approx 452$ dm^2; c) $h = 24$ dm. **57.** *Indicație*: Se obține sistemul: $\pi(r+2)(g-3) = \pi rg$, $\pi r(r+g+5) = 2\pi r(r+g)$: $V \approx 2{,}76$ m^3 **58.** a) $V = 2\,260{,}80$ cm^3; $A = 1\,281{,}12$ cm^2; b) $V = 1\,431{,}432$ cm^3; $A = 910{,}97$ cm^2. **59.** $V = 395\,642{,}88$ cm^3; $A = 29\,541{,}12$ cm^2 **60.** $A = 131{,}88$ dm^2; $V = 3\,768$ dm^3. **61.** $V = 10\,851{,}840$ cm^3. **62.** $V = 87{,}920$ cm^3. **63.** $V = 238{,}485$ cm^3, $A = 195{,}6220$ cm^2. **64.** a) $g = 6$ cm; $B = 9$ cm; b) Aria corp $= 364{,}24$ cm^2 **65.** $\frac{V_1}{V_2} = \frac{\pi a^2 b}{\pi b^2 a} = \frac{a}{b}$.

Cuprinsul

Partea întîi. Exerciţii şi probleme de algebră

Capitolul I. Introducerea literelor în calcule 3
Capitolul II. Numere pozitive şi negative 7
A. Numere întregi 7
B. Operaţii cu numere întregi 10
C. Operaţii cu fracţii care au numărătorul şi numitorul numere pozitive sau negative 17
Capitolul III. Calculul algebric . . 21
A. Valoarea numerică a expresiilor algebrice 21
B. Monoame. Operaţii cu monoame 23
C. Polinoame. Operaţii cu polinoame 26
Capitolul IV. Fracţii algebrice . . 44
Capitolul V. Ecuaţii de gradul I . 52
A. Ecuaţii de gradul I cu o necunoscută 52
B. Probleme de gradul I cu o necunoscută 58
C. Sisteme de două ecuaţii de gradul I cu două necunoscute cu coeficienţi numerici şi literali 68
D. Rezolvarea problemelor cu ajutorul sistemelor de ecuaţii 77
Capitolul VI. Inecuaţii de gradul I cu o necunoscută 89
Capitolul VII. Funcţii 94
Capitolul VIII. Ecuaţii de gradul II 101

Partea a doua. Probleme din geometria plană şi în spaţiu

Capitolul IX. Introducere în geometria plană 108
Capitolul X. Unghiuri 111
Capitolul XI. Triunghiuri 120
Capitolul XII. Drepte paralele . . 129
Capitolul XIII. Patrulatere . . . 135
Capitolul XIV. Cercul 142
Capitolul XV. Figuri asemenea . . 149
Capitolul XVI. Relaţii metrice. . 156
Capitolul XVII. Funcţiile trigonometrice ale unui unghi ascuţit . 163
Capitolul XVIII Poligoane regulate 168
Capitolul XIX. Arii 173
Capitolul XX. Introducere în geometria în spaţiu 183
Capitolul XXI. Poziţii relative ale elementelor fundamentale . . . 185
Capitolul XXII. Proiecţii 193
Capitolul XXIII. Poliedre 196
Capitolul XXIV. Corpuri rotunde 208
Capitolul XXV. Probleme de sinteză 219

Partea a treia. Indicaţii şi răspunsuri

Capitolul I. Introducerea literelor în calcule 229
Capitolul II. Numere pozitive şi negative 230
Capitolul III. Calcul algebric . . 232
Capitolul IV. Fracţii algebrice . . 238
Capitolul V. Ecuaţii de gradul I . 240
Capitolul VI. Inecuaţii de gradul I cu o necunoscută 246
Capitolul VII. Funcţii 247
Capitolul VIII. Ecuaţii de gradul II 248
Capitolul IX. Introducere în geometria plană 250
Capitolul X. Unghiuri 251
Capitolul XI. Triunghiuri 252
Capitolul XII. Drepte paralele . . 254
Capitolul XIII. Patrulatere . . . 255
Capitolul XIV. Cercul 255
Capitolul XV Figuri asemenea . . 256
Capitolul XVI. Relaţii metrice . . 259
Capitolul XVII. Funcţiile trigonometrice ale unui unghi ascuţit 260
Capitolul XVIII Poligoane regulate 261
Capitolul XIX. Arii 262
Capitolul XX. Introducere în geometria în spaţiu 265
Capitolul XXI. Poziţii relative ale elementelor fundamentale . . . 265
Capitolul XXII. Proiecţii 266
Capitolul XXIII. Poliedre 267
Capitolul XXIV. Corpuri rotunde 268
Capitolul XXV. Probleme de sinteză 269